На правах рукописи

Ашихмин Илья Владимирович

Метод комбинирования парных сравнений и система интеллектуальной поддержки для многокритериального выбора

Специальность 05.13.01
"Системный анализ, управление и обработка информации"

Автореферат диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва - 2006

Работа выполнена в Институте системного анализа Российской академии наук

Научный руководитель	доктор технических наук Петровский Алексей Борисович
Официальные оппоненты	доктор физико-математических наук, профессор Ногин Владимир Дмитриевич кандидат физико-математических наук Бритков Владимир Борисович
Ведущая организация	Институт проблем передачи информации Российской академии наук

Защита состоится 26 июня 2006 г. в 11 часов на заседании специализированного совета Д.002.086.02 в Институте системного анализа Российской академии наук по адресу: Москва, 117312, просп. 60-летия Октября, 9.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Института системного анализа Российской академии наук.

Автореферат разослан мая 2006 г.

Ученый секретарь диссертационного совета Д.002.086.02
доктор технических наук А.И. Пропой

Общая характеристика работы

Актуальность темы

Сложные задачи выбора, составляющие основу принятия решений как особого процесса человеческой деятельности, возникают в различных сферах – как деловых, так и личных. Сложность выбора определяется двумя основными факторами. Прежде всего, принятие решений осуществляется в условиях неопределенности. Делая выбор, ЛПР явно или неявно основывает его на последствиях принимаемых им решений. Второй фактор связан с многокритериальностью или многоаспектностью вариантов решений. Оценки вариантов неоднозначны: по одним критериям один вариант лучше, а по другим – иной. Решение задачи выбора зависит также от психологических особенностей человека, ограничивающих его когнитивные возможности. Во избежание чрезмерной нагрузки, человек, как правило, использует различные эвристические приемы. Однако такие эвристики могут приводить к противоречиям и нерациональному выбору.

Важность и сложность проблем принятия решений обуславливает необходимость исследований, направленных на изучение того, как люди принимают решения, разработку специальных методов и компьютерных систем поддержки принятия решений (СППР) для осуществления разумного и рационального выбора. Существенные результаты в этой области были получены в работах М.А.Айзермана, Л.Заде, Р.Л.Кини, О.И.Ларичева, Б.Г.Миркина, О.Моргенштерна, Дж.фон Неймана, В.Д.Ногина, В.В.Подиновского, Г.Райфа, Б.Руа, Т.Саати, П.Фишберна, К.Эрроу и других.

В последнее время наблюдается повышенный интерес к качественным методам поддержки принятия решений, т.е. методам, которые не используют преобразование высказываний ЛПР о своих предпочтениях в числовые зависимости. Однако узким местом вербального анализа решений остается высокая доля несравнимых вариантов и большое число вопросов для выявления предпочтений ЛПР. В связи с этим весьма актуальной является разработка новых методов, помогающих человеку выбирать предпочтительные варианты решений. Такие методы должны брать на себя трудности, связанные с учетом многих критериев, эффективно организовывать диалог с ЛПР и обеспечивать получение и объяснение результата, вызывающего доверие у ЛПР.

Цель и задачи исследования

Целью работы является создание математически и психологически обоснованного интерактивного метода многокритериального выбора лучших альтернатив на основе качественной информации о предпочтениях ЛПР, реализация этого метода в СППР.

Для достижения указанной цели поставлены и решены следующие задачи:

- Анализ существующих методов решения задачи выбора при многих критериях.
- Построение математического аппарата для исследования предпочтений ЛПР.
- Разработка алгоритма выявления и устранения противоречий в предпочтениях ЛПР.
- Разработка процедуры контроля и учета ошибок, допускаемых ЛПР при сравнении многокритериальных альтернатив, для оценки надежности информации о его предпочтениях.
- Разработка алгоритма выбора минимального подмножества лучших альтернатив из заданного множества на основе предпочтений ЛПР.
- Разработка понятной ЛПР процедуры объяснения полученных результатов.
- Разработка СППР с удобным пользовательским интерфейсом.

Методы исследования

Методы системного анализа, теории принятия решений, дискретной математики, логики предикатов первого порядка, теории графов, анализа вычислительной сложности алгоритмов, теории линейного программирования, аналитической геометрии.

На защиту выносится

1. Метод КОМПАС (КОМбинация ПАрных Сравнений), предназначенный для выделения подмножества наилучших альтернатив из заданного множества.
2. Модель предпочтений ЛПР.
3. Модель прогнозирования предпочтений ЛПР.
4. Алгоритм выявления и разбора противоречий в предпочтениях ЛПР.
5. Процедура эффективной организации опроса ЛПР для выявления его/ее предпочтений.
6. Процедура объяснения результатов сравнений векторов, не сравненных ЛПР явно.
7. Система поддержки принятия решений UniComBOS, реализующая метод КОМПАС.

Научная новизна работы

1. Разработан новый математический аппарат для сравнения многокритериальных описаний альтернатив в логике предикатов первого порядка на основе предпочтений ЛПР.
2. Найдено достаточное условие противоречивости предпочтений ЛПР при неполной информации. Доказаны теоремы, содержащие необходимые условия сравнимости пары векторных оценок и противоречивости предпочтений ЛПР.
3. Решена задача определения неизвестных элементов бинарного отношения, отражающего предпочтения ЛПР, что позволяет использовать классически-рациональную функцию выбора.
4. Разработана оптимизационная процедура для сокращения числа обращений к ЛПР при выявлении его предпочтений.
5. Предложен и реализован способ динамического определения индивидуальных способностей ЛПР сравнивать многокритериальные альтернативы, обеспечивающий использование только надежной информации о его предпочтениях.

Практическая ценность работы

Метод КОМПАС и СППР UniComBOS использовались на практических занятиях по курсу «Принятие решений» на факультете прикладной математики Университета г. Ювяскула, Финляндия, в 2001-2003 годах. Система UniComBOS применялась на факультете строительных технологий и управления Технического университета имени Гедиминаса, Вильнюс, Литва, для решения задачи выбора типа договора на выполнение строительных работ.

Реализация результатов работы

Результаты диссертации использованы при выполнении проекта 2.21 программы фундаментальных исследований президиума РАН «Математическое моделирование и интеллектуальные системы» (2001-2005 годы), проекта 1.2 программы фундаментальных исследований ОИТВС РАН «Фундаментальные основы информационных технологий и систем», проектов 01-01-00514, 04-01-00290 Российского фонда фундаментальных исследований, гранта Президента Российской Федерации для поддержки ведущих научных школ НШ1964.2003.1.

Апробация работы

Результаты диссертации и материалы исследований докладывались и обсуждались на 7-й Международной конференции международного общества по системам поддержки принятия решений «СППР и неопределенность в эпоху интернета» (ISDSS'03), Устрон, Польша, 2003; 58-ом заседании Европейской Рабочей Группы «Помощь в многокритериальном принятии решений», Москва, Россия, 2003; 17-я Международной конференции по многокритериальному принятию решений (MCDM 2004), Вистлер, Канада, 2004; Международной научной конференции «Интеллектуализация обработки информации (ИОИ 2004)», Алушта, Украина, 2004; Международной научно-технической конференции «Интеллектуальные системы» (AIS'05), Дивноморское, Россия, 2005; Первой международной конференции «Системный анализ и информационные технологии» (САИТ-2005), Переславль-Залесский, Россия, 2005; научных семинарах ИСА РАН; научных семинарах факультета прикладной математики Университета г. Ювяскула, Финляндия.

Публикации.

По материалам диссертации опубликовано 11 работ.

Личный вклад соискателя

Результаты, выносимые на защиту, получены автором самостоятельно. Личный вклад соискателя в совместно опубликованных работах составляет 2.3 печатных листов из общего объема работ 3.1 печатных листов.

Структура и объем диссертации

Диссертация состоит из введения, пяти глав, заключения, списка литературы (65 наименований) и приложения. Работа изложена на 136 листах, содержит 17 рисунков и 5 таблиц.

Содержание работы

Во **введении** рассматривается задача выделения подмножества лучших многокритериальных альтернатив и трудности, возникающие при ее решении. Обсуждаются различные подходы к решению таких задач. Обосновывается важность и актуальность темы диссертации, Формулируются цели диссертационной работы и решаемые задачи, определяется научная новизна работы и ее практическая значимость. Приводится краткое изложение содержания работы по главам.

Первая глава содержит аналитический обзор существующих методов принятия решений при многих критериях. Рассмотрены основные особенности таких методов, выделенны их достоинства и недостатки.

Теория многомерной полезности, метод аналитической иерархии и методы сравнительного превосходства имеют свои достоинства, главным из которых является практически всегда реализуемая возможность выбора лучшей альтернативы или линейного упорядочения альтернатив. Однако все они имеют общий недостаток, связанный с недостаточным вниманием, уделяемым проблеме выявления предпочтений ЛПР. Психологические эксперименты свидетельствуют о том, что люди выполняют количественные измерения субъективных факторов со значительными ошибками. Кроме того, такие методы “не прозрачны” для ЛПР, поскольку используемые в них операции с количественными оценками невозможно объяснить ЛПР, что не способствует доверию к полученными результатам.

Вербальный анализ решений устраняет эти недостатки, поскольку предпочтения ЛПР выявляются в “качественном” виде, т.е. на языке, привычном ЛПР, и выявленные таким образом предпочтения не подвергаются никаким количественным преобразованиям. На них выполняются только операции сравнения (“лучше”, “хуже” и “эквивалентно”). Получаемые результаты объясняются ЛПР. Однако существующие методы вербального анализа решений обладают слабой решающей способностью, т.е. оставляют большое число альтернатив несравнимыми. В основном, это обусловлено недостаточным объемом используемой информации о предпочтениях ЛПР, которая ограничивается сравнением альтернатив, отличающихся оценками только по двум критериям.

На основе проведенного анализа сделан вывод о необходимости разработки метода, базирующегося на принципах вербального анализа решений и обеспечивающего высокий уровень сравнимости альтернатив.

Во **второй** главе описывается новый метод КОМПАС (КОМбинирование Парных Сравнений), предназначенный для решения широкого круга задач индивидуального многокритериального выбора, связанных с выделением подмножества наилучших альтернатив (вариантов, объектов, способов действия, стратегий).

В начале проводится структуризация решаемой задачи. Имеется конечная совокупность альтернатив, характеризуемых многими количественными (числовыми) или качественными (вербальными) признаками. Часто альтернативы могут быть получены только в результате сложного творческого процесса с участием экспертов из различных областей знаний. Совокупность альтернатив, из которой необходимо выбрать лучшие, будем обозначать буквой *A*.

ЛПР выделяет интересующие его характеристики альтернатив в качестве критериев оценки. Обозначим $C=\{C^1,...,C^k\}$ множество критериев, $C^j(a)$ – оценку альтернативы $a\in A$ по критерию C^j, $K=\{1,..,k\}$ – множество номеров критериев. Шкала оценок $S^j=\{s_1^j,s_2^j,...,s_{m_j}^j\}, j\in K$, по каждому критерию может быть как количественной, так и качественной (вербальной) и не задается заранее, а формируется из оценок всех реальных альтернатив по выделенному критерию: $S^j=\bigcup_{a\in A}C^j(a)$. При этом не требуется предварительного упорядочивания оценок на шкалах критериев.

Всевозможные комбинации оценок образуют k-мерное пространство $S=\prod_{j=1}^{k}S^j$, которое является декартовым произведением шкал критериев. Каждой альтернативе $a\in A$ ставится в соответствие векторная оценка (кортеж) $\left(C^1(a),C^2(a),...,C^k(a)\right)$, состоящая из оценок $C^j(a)$ альтернативы по критериям $C^1,...,C^k$. Обозначим через $\boldsymbol{A}$ множество векторных оценок реальных альтернатив из совокупности A. Очевидно, что $\boldsymbol{A}\subseteq S$.

После этапа структуризации задачи будут сформированы множества реальных альтернатив A, критериев C, шкал критериев S^j и векторных оценок альтернатив $\boldsymbol{A}$. Требуется выделить подмножество наилучших альтернатив с учетом предпочтений ЛПР.

Введем вспомогательное пространство векторных оценок, которое понадобится в дальнейшем для построения процедур выявления предпочтений. Расширим шкалу каждого критерия S^j, добавив к ней фиктивную оценку ω^j: $Q^j=S^j\cup\{\omega^j\}$, и построим декартово произведение расширенных шкал критериев $Q=\prod_{j\in K}Q^j$, аналогичное множеству $S=\prod_{j\in K}S^j$. Рассмотрим некоторую векторную оценку $\boldsymbol{a}\in Q$ и подмножество номеров критериев $J\subseteq K$. Обозначим через $\boldsymbol{a}^J$ векторную оценку, у которой

j-я компонента равна j-й компоненте векторной оценки $\boldsymbol{a}$, если $j \in J$, и равна ω^j, если $j \in K \setminus J$. Векторную оценку, у которой одна компонента – реальная оценка, а остальные компоненты фиктивные оценки, будем называть однокритериальной. Когда две компоненты реальные, векторная оценка называется двухкритериальной, и т.д.

Для описания предпочтений ЛПР используются бинарные отношения P и I, определенные на множестве векторных оценок Q:

$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) \in P$, если $\boldsymbol{a}$ предпочтительнее $\boldsymbol{b}$,

$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) \in I$, если $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ равноценны по предпочтительности,

и порождаемое ими бинарное отношение $R = P \bigcup I$. При этом для каждой пары векторных оценок $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$, принадлежащих бинарному отношению P или I, если j-й компонент одной из них равен фиктивной оценке ω^j, то j-й компонент другой векторной оценки также равен ω^j. Предполагается, что бинарные отношения P, I и R обладают следующими свойствами:

P – строгий частичный порядок (иррефлексивно и транзитивно), (1)

I – эквивалентность (рефлексивно, симметрично и транзитивно), (2)

R – квазипорядок (транзитивно, рефлексивно). (3)

$P \bigcap I = \varnothing$, $R = P \bigcup I$. (4)

Критерии считаются взаимно независимыми по предпочтению.

Определение 1. Критерии из набора C называются взаимно независимыми по предпочтению, если для каждого подмножества критериев $C^* \subset C$ предпочтения на альтернативах, отличающихся лишь оценками по этому подмножеству критериев C^*, не зависят от фиксированных попарно равных оценок по критериям из $C \setminus C^*$.

Применительно к отношениям P и I, взаимная независимость критериев по предпочтению записывается следующим образом:

$$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) \in P \Rightarrow (\boldsymbol{c},\boldsymbol{d}) \in P, \qquad (5)$$

$$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) \in I \Rightarrow (\boldsymbol{c},\boldsymbol{d}) \in I, \qquad (6)$$

где $\forall j \in K, (a^j = b^j) \Rightarrow (c^j = d^j), (a^j \neq b^j) \Rightarrow c^j = a^j \wedge d^j = b^j$,

a^j, b^j, c^j, d^j – j-е компоненты векторных оценок $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ и $\boldsymbol{d}$.

Определение 2. Предпочтения ЛПР называются непротиворечивыми, если бинарные отношения P, I, R удовлетворяют условиям (1)-(6).

Совокупность выявленных предпочтений ЛПР описывается бинарными отношениями $\tilde{P} \subseteq P$ и $\tilde{I} \subseteq I$. Для выявления предпочтений разработаны специальные процедуры. ЛПР предъявляются для сравнения векторные оценки вида $\boldsymbol{a}^J$ и $\boldsymbol{b}^J$, где $J = \{j_1, j_2, ..., j_s\} \subseteq K$, представленные в двух строках таблицы, содержащих только реальные оценки $a^{j_1},...,a^{j_s}$ и $b^{j_1},...,b^{j_s}$ (Таблица 1). Столбцы носят названия соответствующих критериев. Оценки по остальным критериям с номерами $K \setminus J$ предполагаются произвольными и попарно равными. Если для ЛПР $\boldsymbol{a}^J$ предпочтительнее $\boldsymbol{b}^J$, то в бинарное отношение $\tilde{P}$ заносится пара векторных оценок $(\boldsymbol{a}^J, \boldsymbol{b}^J)$, если $\boldsymbol{a}^J$ равноценно $\boldsymbol{b}^J$, то в бинарное отношение $\tilde{I}$ заносится пара векторных оценок $(\boldsymbol{a}^J, \boldsymbol{b}^J)$, а если $\boldsymbol{b}^J$ предпочтительнее $\boldsymbol{a}^J$, то в бинарное отношение $\tilde{P}$ заносится пара векторных оценок $(\boldsymbol{b}^J, \boldsymbol{a}^J)$.

Таблица 1. Сравнение векторных оценок $\boldsymbol{a}^J$ и $\boldsymbol{b}^J$

C^{j_1}	C^{j_2}	$\cdots$	C^{j_s}
a^{j_1}	a^{j_2}	$\cdots$	a^{j_s}
b^{j_1}	b^{j_2}	$\cdots$	b^{j_s}

Процедура выявления предпочтений ЛПР начинается со сравнения однокритериальных векторных оценок. ЛПР попарно сравнивает оценки из шкалы каждого критерия. В результате таких сравнений, оценки по каждому критерию упорядочиваются в соответствии с предпочтениями ЛПР. В отличие от других методов, где порядок на шкалах критериев задается на этапе структуризации, в методе КОМПАС упорядоченность шкал критериев возникает при сравнении однокритериальных векторных оценок.

Затем производится попарное сравнение двухкритериальных векторных оценок. Для поиска пары векторных оценок, предъявляемых ЛПР, применяется специальная оптимизационная процедура, использующая модель прогнозирования, которая позволяет прогнозировать ответы ЛПР при сравнении векторных оценок. Результатом работы процедуры оптимизации числа обращений к ЛПР являются пары векторных оценок и очередность их предъявления ЛПР. Увеличение числа критериев и сравнение трех-, четырех- и так далее критериальных векторных оценок происходит только, если исчерпаны все возможности решения проблемы выбора наилучших альтернатив с использованием текущего числа критериев.

После каждого сравнения векторных оценок, включая сравнения однокритериальных, предпочтения ЛПР проверяются на непротиворечивость, и делается попытка выделить подмножество наилучших альтернатив путем комбинирования выявленных результатов сравнения векторных оценок. Если возникает противоречие, то определяется его причина, и противоречие устраняется. Это выполняется путем предъявления ЛПР его предыдущих ответов и логических следствий из них. ЛПР может указать на ошибочный ответ или выразить несогласие с каким-либо промежуточным результатом. В первом случае ЛПР исправляет свой ответ. Второй случай означает нарушение гипотезы о независимости критериев по предпочтению и/или транзитивности, и может потребовать реструктуризации проблемы. Если противоречия не обнаружено или оно уже устранено и удалось выделить подмножество наилучших альтернатив, это подмножество предъявляется ЛПР и выявление предпочтений прекращается.

В методе КОМПАС предложен механизм контроля надежности информации о сравнениях векторных оценок индивидуально для каждого ЛПР. Увеличение числа критериев происходит до тех пор, пока доля ответов ЛПР, приводящих к противоречиям, в общем числе ответов не превысит некоторого заданного порогового значения или не будет найдено подмножество наилучших альтернатив. Большое число противоречивых ответов ЛПР, превышающее пороговое значение, свидетельствует, что сравнения векторных оценок по текущему числу критериев слишком сложны для ЛПР. Поэтому дальнейшее увеличение числа критериев сделает получаемую информацию ненадежной.

И, наконец, метод КОМПАС, как и другие методы вербального анализа решений, предоставляет ЛПР возможность получения на любом этапе объяснения промежуточных и итоговых результатов на основе выполненных им сравнений альтернатив.

Метод КОМПАС обладает следующими особенностями:

- Метод ориентирован на выбор наилучших альтернатив из множества реальных альтернатив, описываемых количественными и качественными признаками.
- Упорядочение на шкалах критериев формируется в процессе решения задачи.
- Модель предпочтений ЛПР позволяет максимально использовать информацию качественно характера без привлечения эвристик. При сравнении векторных оценок ЛПР указывает только, какая из них предпочтительнее, но не определяет степень превосходства.
- Предпочтения ЛПР проверяются на непротиворечивость после каждого ответа ЛПР. Контроль непротиворечивости включает проверку транзитивности предпочтений, независимости критериев по предпочтению и др.
- Разбор противоречий и объяснение получаемых результатов основывается на простых логических преобразованиях сравнений векторных оценок. При необходимости ЛПР может проконтролировать эти преобразования и внести свои поправки.
- Учитываются индивидуальные способности ЛПР при решении задач сравнения векторных оценок различной сложности.
- Прогнозирование поведения ЛПР помогает организовать эффективный диалог и сокращает число обращений к ЛПР.
- В результате работы метода остается меньше несравнимых альтернатив, чем в других методах, использующих аналогичную информацию о предпочтения ЛПР.

В **третьей** главе изложена модель предпочтений ЛПР, механизмы проверки непротиворечивости предпочтений и сравнимости произвольных векторных оценок. Последний механизм используется для выделения подмножества наилучших альтернатив.

Модель предпочтений ЛПР формируется на языке логики предикатов первого порядка. Введем двуместные предикаты $P(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$, $I(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$ и $R(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$ соответствующие формулам принадлежности $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})\in P$, $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})\in I$ и $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})\in R$. Условия (1)-(6), записанные в конъюнктивной нормальной форме, образуют множество дизъюнктов

Ω^{PI}, в которых предикат R исключен с помощью тождественных преобразований.

Пусть известны некоторые подмножества отношений $\tilde{P} \subseteq P, \tilde{I} \subseteq I$, отражающие выявленные предпочтения ЛПР. Перенумеруем все элементы этих отношений: $\tilde{P} = \left\{(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{b}_1), ..., \left(\boldsymbol{a}_{N_{\tilde{P}}}, \boldsymbol{b}_{N_{\tilde{P}}}\right)\right\}$, $\tilde{I} = \left\{(\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{d}_1), ..., \left(\boldsymbol{c}_{N_{\tilde{I}}}, \boldsymbol{d}_{N_{\tilde{I}}}\right)\right\}$, где $N_{\tilde{P}}$ - число элементов в отношении $\tilde{P}$, а $N_{\tilde{I}}$ - число элементов в отношении $\tilde{I}$, и введем множество формул

$$\Omega^{\tilde{P}\tilde{I}} = \left\{P(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{b}_1), ..., P\left(\boldsymbol{a}_{N_{\tilde{P}}}, \boldsymbol{b}_{N_{\tilde{P}}}\right), I(\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{d}_1), ..., I\left(\boldsymbol{c}_{N_{\tilde{I}}}, \boldsymbol{d}_{N_{\tilde{I}}}\right)\right\}.$$

Обсудим теперь проблемы сравнения пар векторных оценок, не представленных в отношениях $\tilde{P}$ и $\tilde{I}$. Теория логики предикатов первого порядка дает два механизма исследования рассматриваемых формул. Во-первых, можно определить, противоречива или нет совокупность формул. И, во-вторых, выполнима ли некоторая формула. В качестве правила вывода используется принцип резолюции. Установлено следующее утверждение:

Утверждение 1. Если для векторных оценок $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \boldsymbol{Q}$ логическим следствием множества дизъюнктов $\Omega^{PI}, \Omega^{\tilde{P}\tilde{I}}$ является формула $P(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$: $\Omega^{PI}, \Omega^{\tilde{P}\tilde{I}} \vdash P(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$, то $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \in P$; если следствием является формула $I(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$: $\Omega^{PI}, \Omega^{\tilde{P}\tilde{I}} \vdash I(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$, то $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \in I$.

Согласно этому утверждению свойства предпочтений ЛПР, записанные в виде множества дизъюнктов, позволяют находить предпочтения ЛПР для произвольных векторных оценок как логические следствия известных сравнений векторных оценок.

Утверждение 2. Если из формул, составляющих множества $\Omega^{PI}, \Omega^{\tilde{P}\tilde{I}}$, выводим пустой дизъюнкт $\Omega^{PI}, \Omega^{\tilde{P}\tilde{I}} \vdash \square$, то предпочтения ЛПР противоречивы.

Приведенная модель предпочтений ЛПР не очень удобна для решения задачи и объяснения полученных результатов. Во-первых, задача определения выводимости некоторой формулы в логике предикатов первого порядка NP-полна, т.е. на данный момент не существует алгоритмов ее решения за время, полиномиально зависящее от размерности задачи. Поэтому получение результата за приемлемое время при большой размерности задачи невозможно на современных вычислительных средствах.

Во-вторых, понимание ЛПР объяснения результатов, полученных на основе принципа резолюции, требует от него математических знаний. Поэтому предлагается упрощенная модель предпочтений ЛПР с правилом вывода *modus ponens*, которая обладает существенно большей наглядностью с точки зрения объяснения результатов и разбора противоречий. Общая совокупность формул, соответствующая свойствам предпочтений ЛПР и используемая в упрощенной модели предпочтений ЛПР, приводится к виду импликаций и образует множество Ω^{mp}. Выводимость формулы Γ из формул Ω с помощью правила *modus ponens* обозначим $\Omega \vdash^{mp} \Gamma$.

Поставим в соответствие произвольной векторной оценке $\boldsymbol{a} \in Q$ вектор-столбец $\delta(\boldsymbol{a})$, состоящий из нулей и единиц, у которого число компонентов равно общему числу оценок на всех шкалах $M = \sum_{j \in K} |Q^j|$, а единица в векторе $\delta(\boldsymbol{a})$ означает наличие определенной оценки в векторе $\boldsymbol{a}$:

$$\delta(\boldsymbol{a}) = \left(\delta_1^1(\boldsymbol{a}),..,\delta_{m_1}^1(\boldsymbol{a}),\delta_{m_1+1}^1(\boldsymbol{a}),\delta_1^2(\boldsymbol{a}),..,\delta_1^k(\boldsymbol{a}),..,\delta_{m_k}^k(\boldsymbol{a}),\delta_{m_k+1}^k(\boldsymbol{a})\right)^T,$$

где $\delta_i^j(\boldsymbol{a}) = \begin{cases} 1, \text{если } i \le m_j \text{ и } a^j = s_i^j \\ 0, \text{если } i = m_j + 1 \text{или } a^j \ne s_i^j \end{cases}$

Построим матрицы D и E, определяемые выявленными предпочтениями ЛПР (отношениями $\tilde{P}$ и $\tilde{I}$), следующим образом:

$$\mathrm{D} = \left(\delta(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{b}_1),\delta(\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{b}_2),...,\delta\left(\boldsymbol{a}_{N_{\tilde{P}}},\boldsymbol{b}_{N_{\tilde{P}}}\right)\right),$$

$$\mathrm{E} = \left(\delta(\boldsymbol{c}_1,\boldsymbol{d}_1),\delta(\boldsymbol{c}_2,\boldsymbol{d}_2),...,\delta\left(\boldsymbol{c}_{N_{\tilde{I}}},\boldsymbol{d}_{N_{\tilde{I}}}\right)\right),$$

в которых $\delta(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) = \delta(\boldsymbol{a}) - \delta(\boldsymbol{b})$.

Необходимое условие сравнимости произвольных векторных оценок дает следующая теорема:

Теорема 1. Если для векторных оценок $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b} \in Q$ формула $P(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$ выводима из множества дизъюнктов $\Omega^{mp},\Omega^{\tilde{P}\tilde{I}}$ с помощью правила *modus ponens* $\Omega^{mp},\Omega^{\tilde{P}\tilde{I}} \vdash^{mp} P(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$, то система линейных равенств и неравенств

$$Dy + Ez = \delta(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}),\ \boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{0}, \tag{7}$$

где y и z вектора размерности $N_{\tilde{P}}$ и $N_{\tilde{I}}$ соответственно, совместна, причем $\boldsymbol{y} \neq \boldsymbol{0}$. Если выводима формула $I(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$: $\Omega^{mp},\Omega^{\tilde{P}\tilde{I}} \vdash^{mp} I(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$, то система (7) совместна и $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}$.

Задача определения выводимости формул $P(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$ или $I(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$ является NP-полной. Во многих случаях оказывается возможным ее не решать. Для этого определяется совместность системы линейных равенств и неравенств (7). Эта задача принадлежит уже классу полиномиальных задач, и для решения которой существуют хорошие алгоритмы. Если окажется, что система линейных равенств и неравенств (7) несовместна, то не существует вывода ни формулы $P(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$, ни формулы $I(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$.

Любую совокупность выявленных предпочтений ЛПР, представленную в виде бинарных отношений и соответствующих формул логики предикатов первого порядка, можно проверить на противоречивость. Необходимое условие противоречивости множества формул $\Omega^{mp},\Omega^{\tilde{P}\tilde{I}}$ устанавливает

Теорема 2. Если множество дизъюнктов $\Omega^{mp},\Omega^{\tilde{P}\tilde{I}}$, противоречиво, то система линейных равенств и неравенств

$$Dy + Ez = \boldsymbol{0},\ \boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{0}, \tag{8}$$

где вектора y и z размерности $N_{\tilde{P}}$ и $N_{\tilde{I}}$ соответственно, совместна, причем $\boldsymbol{y} \neq \boldsymbol{0}$.

Поскольку все формулы имеют содержательное толкование в терминах сравнений векторных оценок, то доказательство рассуждений может быть предъявлено ЛПР и использовано при объяснении результатов и поиске причины противоречия. Для выведенных сравнений пар векторных оценок можно дать объяснение результата, которое представляет собой конечную последовательность сравнений векторных оценок, получаемую непосредственно из формального вывода соответствующей формулы. Каждый элемент этой последовательности есть либо сравнение пары векторных оценок, сделанное ЛПР, либо сравнение пары векторных оценок, полученное из предшествующего элемента заменой попарно равных компонент векторных оценок другими попарно равными оценками, либо сравнение пары векторных оценок, полученное по транзитивности из двух предыдущих элементов последовательности. Последний элемент объясняющей последовательности совпадает с объясняемым сравнением векторных оценок. Для предъявления объяснения ЛПР производится простой перевод элементов объясняющей последовательности на естественный язык.

Приведем для примера вывод формулы $P(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$, где $\boldsymbol{a}=\left(s_1^1,s_1^2,s_1^3\right)$ и $\boldsymbol{b}=\left(s_2^1,s_2^2,s_2^3\right)$, и соответствующее ему объяснение того, что альтернатива a с оценками $\left(s_1^1,s_1^2,s_1^3\right)$ предпочтительнее альтернативы b с оценками $\left(s_2^1,s_2^2,s_2^3\right)$. Допустим, в результате выявления предпочтений стало известно, что отношение $\tilde{P}$ содержит следующие пары векторных оценок: $\left(\left(s_1^1,s_1^2,\omega^3\right),\left(s_2^1,s_3^2,\omega^3\right)\right)$ и $\left(\left(\omega^1,s_3^2,s_1^3\right),\left(\omega^1,s_2^2,s_2^3\right)\right)$. Тогда выводом формулы $P(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$ является следующая последовательность:

1. $P\left(\left(s_1^1,s_1^2,\omega^3\right),\left(s_2^1,s_3^2,\omega^3\right)\right)$,
2. $P\left(\left(s_1^1,s_1^2,\omega^3\right),\left(s_2^1,s_3^2,\omega^3\right)\right)\supset P\left(\left(s_1^1,s_1^2,s_1^3\right),\left(s_2^1,s_3^2,s_1^3\right)\right)$,
3. $P\left(\left(s_1^1,s_1^2,s_1^3\right),\left(s_2^1,s_3^2,s_1^3\right)\right)$,
4. $P\left(\left(\omega^1,s_3^2,s_1^3\right),\left(\omega^1,s_2^2,s_2^3\right)\right)$,
5. $P\left(\left(\omega^1,s_3^2,s_1^3\right),\left(\omega^1,s_2^2,s_2^3\right)\right)\supset P\left(\left(s_2^1,s_3^2,s_1^3\right),\left(s_2^1,s_2^2,s_2^3\right)\right)$,
6. $P\left(\left(s_2^1,s_3^2,s_1^3\right),\left(s_2^1,s_2^2,s_2^3\right)\right)$,

7. $P\left(\left(s_1^1,s_1^2,s_1^3\right),\left(s_2^1,s_3^2,s_1^3\right)\right)\wedge P\left(\left(s_2^1,s_3^2,s_1^3\right),\left(s_2^1,s_2^2,s_2^3\right)\right)\supset$

$\supset P\left(\left(s_1^1,s_1^2,s_1^3\right),\left(s_2^1,s_2^2,s_2^3\right)\right)$,

8. $P\left(\left(s_1^1,s_1^2,s_1^3\right),\left(s_2^1,s_2^2,s_2^3\right)\right)$.

Здесь формулы 1 и 4 соответствуют парам векторных оценок в отношении $\tilde{P}$, формулы 2 и 5 – условию независимости критериев по предпочтению, формула 3 получается с помощью правила *modus ponens* из формул 1 и 2, а формула 6 из формул 4 и 5, формула 7 соответствует условию транзитивности отношения P, и, наконец, искомая формула 8 получается с помощью правила *modus ponens* из формул 3, 6 и 7.

На естественном языке объяснение выглядит как следующая последовательность утверждений, где вместо символов s_i^j и C^j ЛПР предъявляются их содержательные значения:

«Вы ранее сказали, что предпочитаете оценки s_1^1,s_1^2 по критериям C^1,C^2 оценкам s_2^1,s_3^2»;

«Положим оценку по критерию C^3 равной s_1^3. Предпочтения поменяться не должны: оценки s_1^1,s_1^2,s_1^3 по критериям C^1,C^2,C^3 предпочтительнее оценок s_2^1,s_3^2,s_1^3»;

«Вы ранее сказали, что предпочитаете оценки s_3^2,s_1^3 по критериям C^2,C^3 оценкам s_2^2,s_2^3»;

«Положим оценку по критерию C^1 равной s_2^1. Предпочтения поменяться не должны: оценки s_2^1,s_3^2,s_1^3 по критериям C^1,C^2,C^3 предпочтительнее оценок s_2^1,s_2^2,s_2^3»;

«Заметим, что в сравнении, где оценки s_1^1,s_1^2,s_1^3 по критериям C^1,C^2,C^3 предпочтительнее оценок s_2^1,s_3^2,s_1^3, вторая совокупность оценок совпадает с первой совокупностью оценок в сравнении, где оценки s_2^1,s_3^2,s_1^3 по критериям C^1,C^2,C^3 предпочтительнее оценок s_2^1,s_2^2,s_2^3. Следовательно, оценки s_1^1,s_1^2,s_1^3 по критериям C^1,C^2,C^3 предпочтительнее оценок s_2^1,s_2^2,s_2^3».

На каждом шаге объяснения ЛПР может выразить свое несогласие с приведенным сравнением векторных оценок. В этом случае необходимо внести исправления в сделанные ранее сравения векторных оценок.

Аналогично выглядит разбор противоречия, которое сводится к объяснению того, что некоторая векторная оценка $\boldsymbol{a}$ предпочтительнее самой себя. Цель такого объяснения – найти либо ошибочное сравнение векторных оценок, сделанное ЛПР, либо предположение о свойствах предпочтений ЛПР, которое оказывается невыполнимым. В частности, согласие ЛПР со всеми выводами на всех шагах разбора противоречия означает, что его строгие предпочтения не иррефлексивны.

В **четвертой** главе приведена модель прогнозирования предпочтений ЛПР и основанная на ней процедура формирования векторных оценок, предъявляемых ЛПР для сравнения.

Вводится специальная функция прогнозирования u, которая каждой векторной оценке $\boldsymbol{a} \in Q$ ставит в соответствие неотрицательное число. Вид этой функции зависит от множеств $\tilde{P}, \tilde{I}$. Значение функции прогнозирования u для некоторой векторной оценки $\boldsymbol{a}$ равно скалярному произведению $u(\boldsymbol{a}) = \left(\delta(\boldsymbol{a}), \boldsymbol{v}^*\right)$ вектора $\delta(\boldsymbol{a})$ и оптимального вектора $\boldsymbol{v}^*$ следующей задачи линейного программирования:

$$\left(\boldsymbol{\iota}^M, \boldsymbol{v}\right) \to \min$$

$$\mathrm{D}^T \boldsymbol{v} + \boldsymbol{\sigma} \geq \boldsymbol{\iota}^{N_{\tilde{P}}},\ \mathrm{E}^T \boldsymbol{v} = \boldsymbol{0},\ \boldsymbol{\sigma} \leq p^* \boldsymbol{\iota}^{N_{\tilde{P}}},\ \boldsymbol{v}, \boldsymbol{\sigma} \geq \boldsymbol{0},$$

где $\boldsymbol{v} = \left(v_1^1, v_2^1, \ldots, v_{m_1}^1, v_{m_1+1}^1, v_1^2, \ldots, v_i^j, \ldots, v_{m_{k-1}}^{k-1}, v_{m_{k-1}+1}^{k-1}, v_1^k, \ldots, v_{m_k-1}^k, v_{m_k}^k, v_{m_k+1}^k\right)^T$ – вектор-столбец размерности M, $\boldsymbol{\sigma}$ – вектор-столбец размерности $N_{\tilde{P}}$, $\boldsymbol{\iota}^M$ и $\boldsymbol{\iota}^{N_{\tilde{P}}}$ – векторы-столбцы, состоящие только из единиц размерности M и $N_{\tilde{P}}$ соответственно, $\boldsymbol{0}$ – нулевой вектор столбец. В этой задаче число p^* является оптимальным решением еще одной задачи линейного программирования

$$p \to min,$$

$$\mathrm{D}^T \boldsymbol{v} + \boldsymbol{\sigma} \geq \boldsymbol{\iota}^{N_{\tilde{P}}},\ \mathrm{E}^T \boldsymbol{v} = \boldsymbol{0},\ \boldsymbol{\sigma} \leq p \boldsymbol{\iota}^{N_{\tilde{P}}},\ \boldsymbol{v}, \boldsymbol{\sigma} \geq \boldsymbol{0}.$$

Последняя задача минимизирует максимальное значение неотрицательных компонент разности $\boldsymbol{\iota}^{N_{\tilde{P}}}$-$\mathrm{D}^T\boldsymbol{v}$ для всех допустимых векторов $\boldsymbol{v}$.

Предполагается, что при сравнении векторных оценок $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ вероятность того, что векторная оценка $\boldsymbol{a}$ предпочтительнее для ЛПР векторной оценки $\boldsymbol{b}$ тем больше, чем больше разность функций прогнозирования $u(\boldsymbol{a})-u(\boldsymbol{b})$.

Опишем процедуру выбора следующей пары векторных оценок реальных альтернатив $(\boldsymbol{a}',\boldsymbol{b}')$ из множества $\boldsymbol{A}$, которую желательно сравнить в первую очередь с помощью дополнительных вопросов ЛПР и модели предпочтений.

1. Исключить из множества $\boldsymbol{A}$ все векторные оценки, для которых существует предпочтительная векторная оценка из $\boldsymbol{A}$, т.е. все $\boldsymbol{a}$ для которых $\exists \boldsymbol{b}\in \boldsymbol{A},\left(\Omega^{\tilde{P}\tilde{I}},\Omega^{mp}\vdash^{mp} P(\boldsymbol{b},\boldsymbol{a})\right)$. Обозначим полученное множество $\boldsymbol{B}=\left\{\boldsymbol{a}\in \boldsymbol{A}\mid\neg\exists \boldsymbol{b}\in \boldsymbol{A},\Omega^{\tilde{P}\tilde{I}}\cup\Omega^{mp}\vdash^{mp} P(\boldsymbol{b},\boldsymbol{a})\right\}$

2. Выбрать векторную оценку $\boldsymbol{a}'$ из $\boldsymbol{B}$ с наибольшим значением функции прогнозирования $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{a}')$: $\boldsymbol{a}'\in \arg\max\limits_{\boldsymbol{a}\in\boldsymbol{B}} u(\boldsymbol{a})$

3. Выбрать векторную оценку $\boldsymbol{b}'$ из $\boldsymbol{B}\backslash\{\boldsymbol{a}'\}$ с наибольшим значением функции прогнозирования $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{b}')$: $\boldsymbol{b}'\in \arg\max\limits_{\boldsymbol{a}\in\boldsymbol{B}\backslash\{\boldsymbol{a}'\}} u(\boldsymbol{a})$

4. Если $\Omega^{\tilde{P}\tilde{I}}\cup\Omega^{mp}\vdash^{mp} I(\boldsymbol{b}',\boldsymbol{a}')$, то из множества $\boldsymbol{B}$ исключить $\boldsymbol{b}'$: $\boldsymbol{B}:=\boldsymbol{B}\backslash\{\boldsymbol{b}'\}$ и перейти к шагу 3.

5. конец.

В результате этой процедуры получаем пару векторных оценок $(\boldsymbol{a}',\boldsymbol{b}')$, несравнимых на основе имеющейся информации, т.е. из формул $\Omega^{mp},\Omega^{\tilde{P}\tilde{I}}$ не выводимо ни $P(\boldsymbol{a}',\boldsymbol{b}')$, ни $I(\boldsymbol{a}',\boldsymbol{b}')$, ни $P(\boldsymbol{b}',\boldsymbol{a}')$.

Предложенная процедура позволяет выделить подмножество наилучших альтернатив, не сравнивая все возможные пары векторных оценок реальных альтернатив.

Для поиска последовательности вопросов, задаваемых ЛПР, решается специальная задача целочисленного линейного программирования с переменными векторами $\boldsymbol{r}_1^+,\boldsymbol{r}_1^-,\ldots,\boldsymbol{r}_t^+,\boldsymbol{r}_t^-$

размерности *M*, в которой максимизируется скалярное произведение $\left(\boldsymbol{v}^*,\boldsymbol{r}_1^+ - \boldsymbol{r}_1^-\right)$. Векторы $\boldsymbol{r}_i^+,\boldsymbol{r}_i^-, i=1,...,t$, задают последовательность пар векторных оценок $\left(\boldsymbol{g}_i,\boldsymbol{h}_i\right),\ \boldsymbol{g}_i,\boldsymbol{h}_i \in Q,\ i=1,...,t$ таких, что $\delta\left(\boldsymbol{g}_i,\boldsymbol{h}_i\right)=\boldsymbol{r}_i^+ - \boldsymbol{r}_i^-$. В задаче присутствуют следующие линейные ограничения: скалярное произведение $\left(\boldsymbol{v}^*,\boldsymbol{r}_1^+ - \boldsymbol{r}_1^-\right)$ не больше скалярных произведений $\left(\boldsymbol{v}^*,\boldsymbol{r}_i^+ - \boldsymbol{r}_i^-\right), i=2,...,t$, векторные оценки $\boldsymbol{a}'$ и $\boldsymbol{b}'$ сравнимы в условиях теоремы 1 при добавлении в бинарное отношение $\tilde{P}$ пар векторных оценок $\left(\boldsymbol{g}_i,\boldsymbol{h}_i\right), i=1,...,t$, векторы $\boldsymbol{r}_i^+,\boldsymbol{r}_i^-$ имеют равное число «1» и «-1» для каждого $i=1,...,t$.

Полученные из решения этой задачи пары векторных оценок $\left(\boldsymbol{g}_i,\boldsymbol{h}_i\right)$ предъявляются ЛПР для сравнения в порядке возрастания разности функций прогнозирования $u\left(\boldsymbol{g}_i\right)-u\left(\boldsymbol{h}_i\right)$ начиная с пары векторных оценок $\left(\boldsymbol{g}_i,\boldsymbol{h}_i\right)$. При такой последовательности вопросов вероятность получить ответ, противоположный желаемому, максимальна для первого вопроса и убывает для всех последующих. Тем самым такая последовательность является оптимальной среди всех возможных последовательностей с точки зрения минимизации номера вопроса, на который будет получен нежелательный ответ. Естественно, пары векторов, для которых $\boldsymbol{r}_i^+ = \boldsymbol{r}_i^- = \boldsymbol{0}$ не предъявляются.

Для оценки эффективности предложенной процедуры формирования последовательности предъявляемых пар векторных оценок были проведены экспериментальные исследования, в которых испытуемые решали задачу выделения подмножества наилучших альтернатив с помощью метода КОМПАС. На рисунке 1 показана зависимость доли ответов ЛПР совпадающих с ответами, определяемыми функцией прогнозирования, от номера вопроса. Значения усреднены по всем испытаниям.

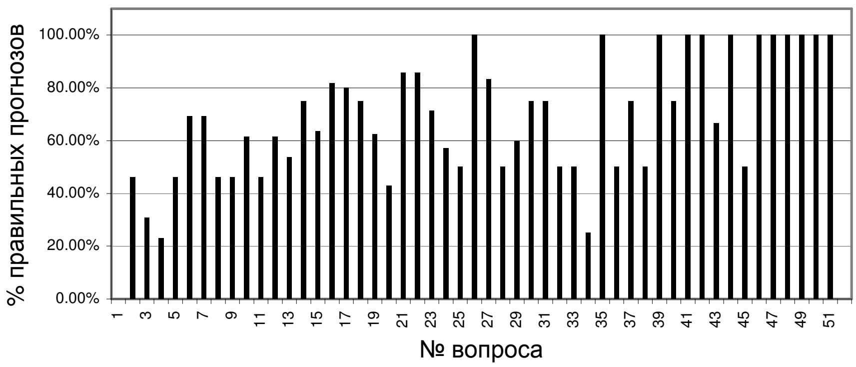

Рисунок 1 Доля правильных ответов в зависимости от номера вопроса

В **пятой** главе описывается СППР UniComBOS, предназначенная для помощи ЛПР в решении слабоструктурируемых задач выбора при многих критериях и реализующая метод КОМПАС. Она содержит визуальные диалоговые компоненты для обмена информацией с ЛПР, автоматизированные процедуры проверки сравнимости произвольных векторных оценок, объяснения, поиска и устранения противоречий в диалоге с ЛПР. Основные компоненты СППР UniComBOS приведены на рисунке 2.

Характерной особенностью СППР UniComBOS является использование специальной цветовой индикации векторных оценок, для облегчения ответов ЛПР при выявлении его предпочтений. Группы оценок, отражающие достоинства и недостатки сравниваемых векторных оценок, выделяются разными цветами. Например, сравнение трехкритериальных векторных оценок выполняется только после сравнения одно- и двухкритериальных векторных оценок. Поэтому системе "известно", какие одно- и двухкритериальные векторные оценки в каждой паре трехкритериальных векторных оценок ЛПР считает лучшими, а какие худшими. Каждую пару трехкритериальных векторных оценок можно разбить на пару однокритериальных векторных оценок и пару двухкритериальных векторных оценок тремя разными способами. Это дает дополнительные возможности для проверки согласованности ответов ЛПР, поскольку каждая пара таких векторных оценок показывается три раза в разном представлении с применением разной цветовой индикации, и три результата сравнения проверяются на идентичность.

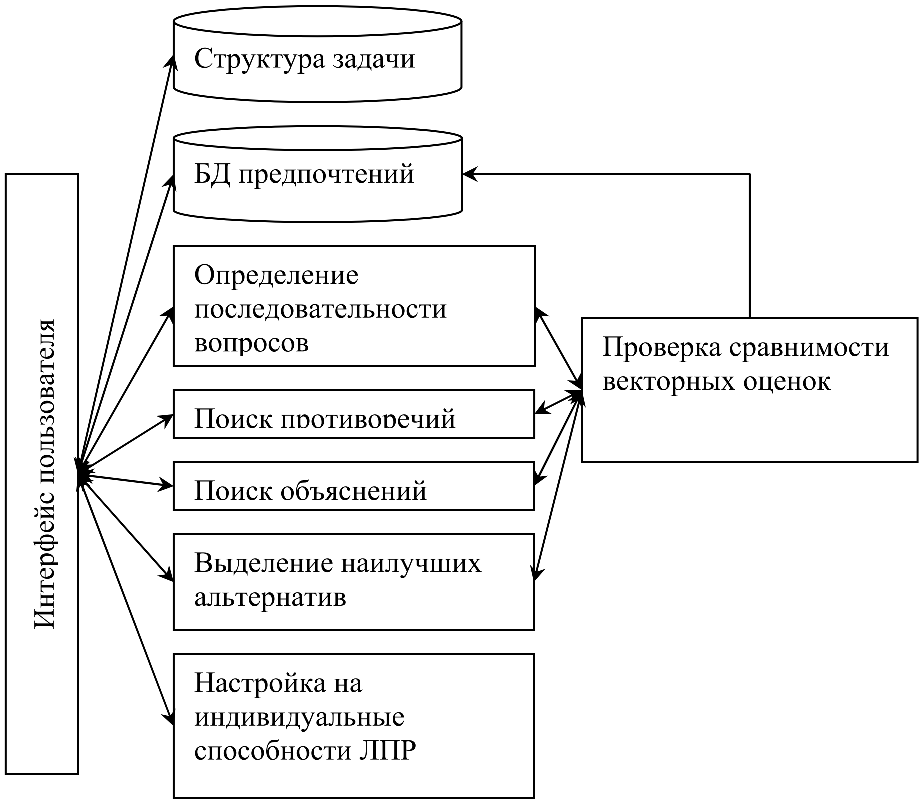

Рисунок 2. Компоненты СППР UniComBOS

В заключении приводятся основные результаты и выводы, полученные в диссертационной работе.

Приложения содержат представление свойств бинарных отношений, в виде множества дизъюнктов, доказательство теоремы 1, алгоритм поиска вывода сравнимости векторных оценок.

Основные результаты работы

1. Проведен анализ существующих методов решения задачи выбора при многих критериях, выявлена необходимость разработки математически и психологически корректных методов, обеспечивающих высокую сравнимость альтернатив.
2. Разработан метод вербального анализа решений КОМПАС, который, используя качественную информацию о структуре задачи и предпочтениях ЛПР, помогает ему выделить подмножество наилучших альтернатив.
3. Построена модель предпочтений ЛПР в логике предикатов первого порядка.
4. Найдены необходимые условия сравнимости произвольных векторных оценок и противоречивости предпочтений ЛПР.
5. Разработан алгоритм выделения подмножества наилучших альтернатив из заданного множества на основе предпочтений ЛПР.
6. Предложены процедуры выявления и устранения противоречий в предпочтениях ЛПР, которые позволяют определить причину противоречивости.
7. Разработана процедура контроля и учета ошибок, допускаемых ЛПР при сравнении многокритериальных альтернатив, для оценки надежности информации о его предпочтениях.
8. Предложена процедура эффективной организации опроса ЛПР для сокращения времени решения задачи. Проанализированы свойства этой процедуры.
9. Предложена новая процедура объяснения результатов, которая представляет собой рассуждения в терминах сравнений векторных оценок.
10. Разработана СППР с удобным пользовательским интерфейсом, реализующая метод КОМПАС.

Список работ, опубликованных по теме диссертации.

1. Ашихмин И.В., Ройзензон Г.В. Выбор лучшего объекта на основе парных сравнений на подмножествах критериев. // «Методы принятия решений». М.: Едиториал УРСС, 2001 г., с. 51-71.
2. Ашихмин И.В., Ройзензон Г.В., Фуремс Е.М. Упорядочивание объектов на основе парных сравнений на подмножествах критериев. //

Труды международного конгресса "Искусственный интеллект в XXI веке". М.: Физматлит, 2001, Т.1, с. 463-470.
3. Ashikhmin I.V., Furems E.M., Larichev O.I., Roizenson G.V. Decision Support System UniComBOS to Discreet Multi-Criteria Choice Problems // DSS in the Uncertainty of the Internet Age. Poland, The Karol Adamiecki University of Economics in Katowice, 2003, pp. 111-121.
4. Ларичев О.И., Ашихмин И.В., Ройзензон Г.В., Фуремс Е.М. Поддержка выбора лучшего объекта на основе независимости критериев по предпочтениям и транзитивности. // Новости искусственного интеллекта. 2003, №4, с. 12-19.
5. Ashihmin I.V., Furems E.M. Decision Support System for the Best Object Selection with Inconsistency Control. // Abstracts of 58th Meeting of the European Working Group Multiple Criteria Decision Aiding. Moscow, URSS, 2003, pp. 5-6.
6. Ашихмин И.В. Выбор лучшего объекта на основе отношения предпочтения на частичных описаниях объектов. // Искусственный интеллект. 2004, №2, с. 11-16.
7. Ашихмин И.В., Фуремс Е.М. СППР UniComBOS для выбора лучшего объекта по многим критериям. // Искусственный интеллект 2004, №2, с. 243-247.
8. Ашихмин И.В. Анализ предпочтений ЛПР на частичных описаниях многокритериальны3х объектов. // Методы поддержки принятия решений. Т.12, М.: Едиториал УРСС, 2005, с. 7-15.
9. Ашихмин И.В., Фуремс Е.М. UniComBOS - интеллектуальная система поддержки принятия решений для сравнения и выбора многокритериальных объектов. // Методы поддержки принятия решений. Т.12, М.: Едиториал УРСС, 2005, с. 16-25.
10. Ашихмин И.В., Фуремс Е.М. СППР UniComBOS для выбора лучшего объекта с возможностью объяснения. // Труды Международных научно-технических конференций «Интеллектуальные системы» (IEEE AIS'05) и «Интеллектуальные САПР» (CAD-2005). Т.1, М.: Физматлит, 2005, с. 376-381.
11. Ашихмин И.В., Фуремс Е.М. Интеллектуальная поддержка многокритериального выбора - система UniComBOS. // Первая международная конференция «Системный анализ и информационные технологии» (САИТ-2005): Труды конференции. Т.1, М.: КомКнига, 2005, с. 236-239.