

**Основанные на решетках
алгебраические модели
продукционных систем и
ВОЗМОЖНОСТИ ИХ
применения
в некоторых задачах ИИ**

Бинарные отношения

- Транзитивность: $(a, b), (b, c) \in R \Rightarrow (a, c) \in R$
- Замыкание, редукция
- Алгоритмы типа Уоршолла $O(n^3)$

1. Элементарная продукционная логика

- Множество фактов F
- Продукции $a \rightarrow b$ ($a, b \in F$)
- Логическое отношение – транзитивность
- Логическое замыкание $R^* = \rightarrow^*$
- Эквивалентные базы знаний (БЗ)
- Логическая связь $a \xrightarrow{R} b$:

$$\exists b_1, \dots, b_m \in F; (b_{i-1}, b_i) \in R, i = 1, \dots, m;$$

$$a = b_0; b = b_m$$

Существование замыкания

Теорема 1.1. Для произвольного бинарного отношения R на множестве F логическое замыкание существует и представляет собой совокупность всех пар $(a, b) \in F$, логически связанных отношением R .

А.Ахо, М.Гэри, Д.Ульман: для ациклического графа существует ($O(n^3)$) единственная транзитивная редукция.

Продукционно-логические уравнения

Начальное множество $F_0(R) = \{x \in F \mid \forall a \Rightarrow (a, x) \notin R\}$

Уравнение

$$(1.1) \quad R^*(x) = b,$$

$b \in F$ – заданный элемент, $x \in F_0$ – неизвестный.

Частное и общее решения.

Решение ур-я (1.1) ~ обратный логический вывод.

Расслоение отношения $R = \bigcup_{t \in T} R_t$. Уравнения вида

$$(1.2) \quad R_t^*(x) = b$$

Разрешимость логических уравнений

Теорема 1.2. Каждое (частное) решение уравнения (1.1) является решением некоторого уравнения (1.2). Уравнение (1.2) имеет не более одного решения.

Теорема 1.3. Пусть $G_t(b)$ - подграф отношения R_t , содержащий вершину b и все вершины, из которых она достижима. Тогда, если граф $G_t(b)$ ацикличесок, то ур-е (1.2) имеет единственное решение, иначе решений нет.

Круг вопросов о продукционно-логических отношениях

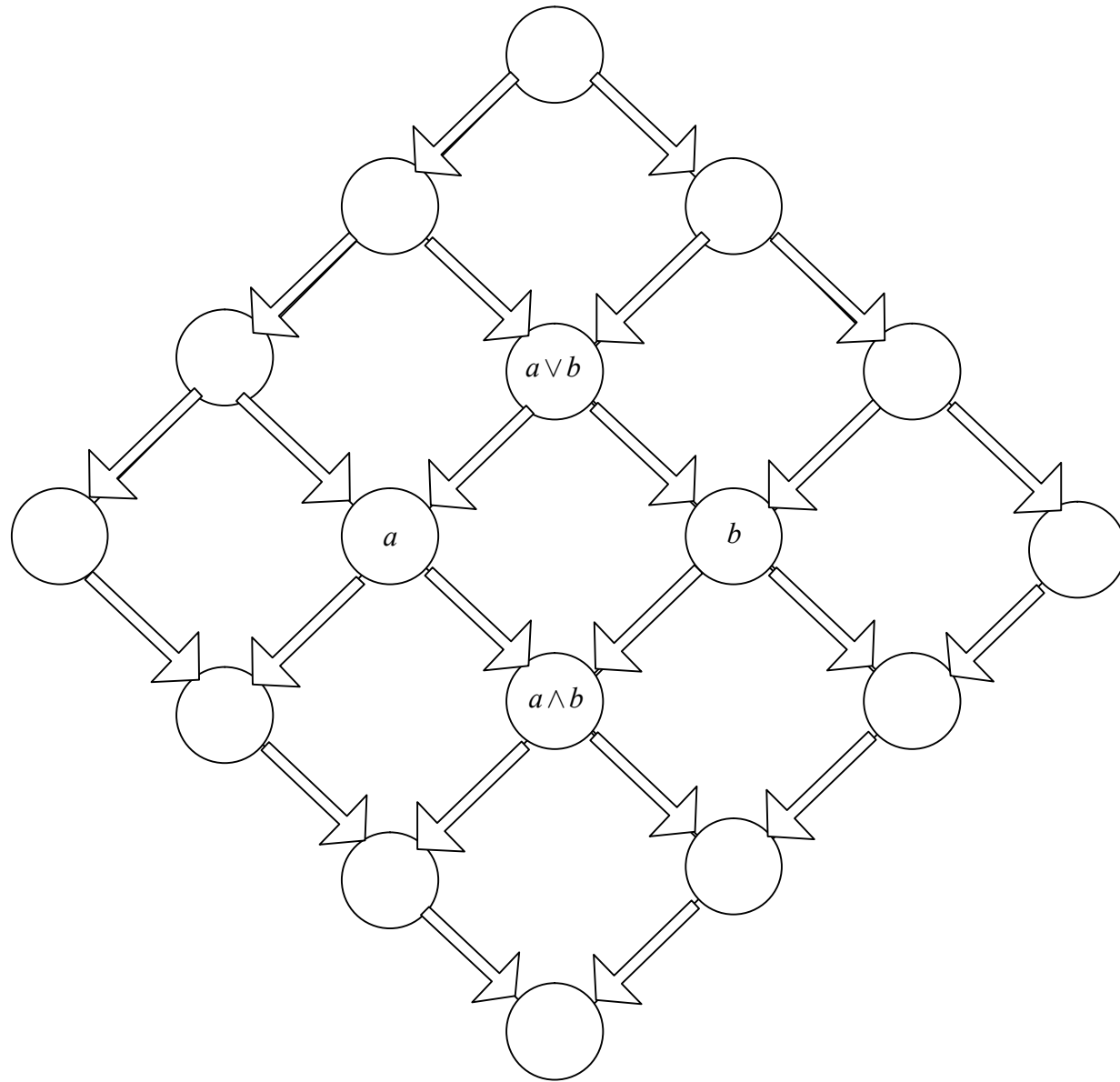
- существование и структура замыкания
- эквивалентные преобразования
- каноническая форма
- существование и построение редукции
- продукционно-логические уравнения

2. Стандартная продукционная логика

- Множество элементарных фактов F
- Продукции $\{a_1, \dots, a_n\} \rightarrow \{b_1, \dots, b_m\}$ ($a_i, b_j \in F$)
- Обозначения $A = \{a_1, \dots, a_n\}$, $B = \{b_1, \dots, b_m\}$
- Решетка множеств $A, B \in 2^F = \mathbb{F}$

Решетки

- Частичный порядок: $a \leq b, a, b \in \mathbb{F}$
- Операции $\wedge, \vee : \forall a, b \in \mathbb{F} \Rightarrow a \wedge b, a \vee b \in \mathbb{F}$
 $a \wedge b \leq b, a \wedge b \leq a; c \leq b, c \leq a \Rightarrow c \leq a \wedge b$
 $b \leq a \vee b, a \leq a \vee b; b \leq c, a \leq c \Rightarrow a \vee b \leq c$
- Решетки: множеств, типов
- Ограниченная решетка:
 $\exists O, I \in \mathbb{F} : O \leq a \leq I \forall a \in \mathbb{F}$
- Точечная решетка: $\forall a \in \mathbb{F} \Rightarrow a = \bigvee_t a_t$,
Точка $a_t : b < a_t \Rightarrow b = O$



Логические отношения

- Модель: $\mathbb{F} = 2^F$, $(\leq, \wedge, \vee) \sim (\subseteq, \cap, \cup)$
- Продукции $A \rightarrow B$ ($A, B \in \mathbb{F}$)
- Логическое отношение \rightarrow
тавтология: $A \supseteq B \Rightarrow A \rightarrow B$, транзит-сть,
дистрибутивность (монотонный вывод):
 $\{A \rightarrow B, A \rightarrow C\} \Rightarrow A \rightarrow B \cup C$
- Логическое замыкание R^L
- Логическая связь $A \xrightarrow{R} B$

Существование замыкания

Теорема 2.1. Для бинарного отношения R на решетке \mathbb{F} логическое замыкание R^L существует и представляет собой множество всех упорядоченных пар $A, B \in \mathbb{F}$, логически связанных отношением R .

Эквивалентные преобразования

- Два отношения эквивалентны (\sim), если их логические замыкания совпадают.
- Теорема 2.2. Пусть R, R_1, R_2 – отношения на \mathbb{F} . Если $R_1 \sim R_2$, то $R \cup R_1 \sim R \cup R_2$.
- Принцип локальности

Каноническая форма

- Отношение на точечной решетке \mathbb{F} называется каноническим, если оно задано множеством пар вида (A, a) , где $A \in \mathbb{F}$, a – точка в \mathbb{F} .
- Теорема 2.3. Для любого бинарного отношения на точечной решетке существует логически эквивалентное ему каноническое отношение.

Структура замыкания

- Для R построим \tilde{R} :
$$R_1 = R \cup \{(A, A) \mid A \in \mathbb{F}\}$$
$$R_2 = R_1 \cup \{(A_1 \cup \dots \cup A_m, B_1 \cup \dots \cup B_m) \mid (A_i, B_i) \in R_1\}$$
$$\tilde{R} = R_2 \cup \{(A, B) \mid A \supset B\}$$
- Теорема 2.4. Логическое замыкание R совпадает с транзитивным замыканием соответствующего отношения \tilde{R} .

Логическая редукция

- Для R построим \tilde{R} (обратные шаги):

$$R_{-1} = R \setminus \{(A, B) \mid A \supset B\}$$

$$R_{-2} = R_{-1} \setminus \{(A_1 \cup \dots \cup A_m, B_1 \cup \dots \cup B_m) \mid (A_i, B_i) \in R_{-1}\}$$

$$\tilde{R} = R_{-2} \setminus \{(A, A) \mid A \in \mathbb{F}\}$$

- Теорема 2.5. Если для \tilde{R} существует транзитивная редукция R^0 , то соответствующее ей \tilde{R}^0 - логическая редукция исходного отношения R .

Логические уравнения

- Соответствие $R^L : \mathbb{F} \rightarrow \mathbb{F}$. $(A, B) \in R^L$
- Макс. образ, минимальный прообраз
- Точечная решетка, каноническое отношение, начальная точка
- Начальное множество $\mathbb{F}_0 \subseteq \mathbb{F}$
- Уравнение
(2.1) $R^L(X) = B$ ($B \in \mathbb{F}$, $X \in \mathbb{F}_0$)
- Решения: приближенное, точное, общее

Методы решения

Теорема 2.5. Пусть $\{X_s\}$ – общее решение уравнения (2.1) при $B = B_1$, а $\{Y_p\}$ – общее решение при $B = B_2$. Тогда общее решение при $B = B_1 \cup B_2$ – множество всех элементов вида $X_s \cup Y_p$, из которого исключены элементы, содержащие другие элементы этого же множества.

Расслоение

- \mathbb{F} – точечная решетка, R – каноническое отношение, B – конечное объединение точек.
- Расслоение отношения $R = \bigcup R_t$. Уравнения:

$$(2.2) R_t^L(X) = B \quad (t \in T)$$

Теорема 2.6. Каждое решение уравнения (2.1) является решением некоторого уравнения (2.2).
Уравнение (2.2) имеет не более одного решения.

Следствие. Для нахождения общего решения (2.1) достаточно найти все решения (2.2), затем исключить элементы, содержащие другие элементы.

Уравнение с точкой

- Уравнение

$$(2.3) \quad R_t^L(X) = b \quad (b - \text{точка})$$

- Граф G_t : каждая точка из R_t – вершина; для пары $(A, a) \in R_t$ – дуги из всех точек элемента A в вершину a .
- Граф $G_t(b)$: подграф, содержащий b и все вершины, из которых она достижима.

Разрешимость

Теорема 2.8. Если граф $G_t(b)$ не имеет цикла, то единственное решение уравнения (2.3) – объединение всех точек, соответствующих входным вершинам графа. Если $G_t(b)$ содержит цикл, то уравнение решений не имеет.

3. Продукционная логика 0 порядка

- Булева решетка \mathbb{F} – задана операция $'$:
 $\forall a \exists a' : a \wedge a' = O, a \vee a' = I$
- Дистрибутивность
 $(a \vee b) \wedge c = (a \wedge c) \vee (b \wedge c); (a \wedge b) \vee c = (a \vee c) \wedge (b \vee c)$
- Решетка Линденбаума-Тарского \mathbb{L}
 $(a \leq b) \Leftrightarrow (a \Rightarrow b)$

Продукционно-логические отношения \rightarrow

- Содержат \leq : $a \leq b \Rightarrow a \rightarrow b, a, b \in \mathbb{F}$
- Контрапозиционность $a \rightarrow b \Rightarrow b' \rightarrow a'$
- Дистрибутивность
 - $\{a \rightarrow b_1, a \rightarrow b_2\} \Rightarrow a \rightarrow b_1 \wedge b_2$
 - $\{a_1 \rightarrow b, a_2 \rightarrow b\} \Rightarrow a_1 \vee a_2 \rightarrow b$
- Транзитивность $\{a \rightarrow b, b \rightarrow c\} \Rightarrow a \rightarrow c$
- Логическое замыкание, редукция

Результаты

- Существует логическое замыкание
- Возможны локально-эквивалентные преобразования
- Логическое замыкание R совпадает с транзитивным замыканием $\tilde{R} \supseteq R$
- Логическая редукция R сводится к транзитивной редукции \tilde{R}

4. Продукционная логика 1 порядка

- Полная булева решетка – многоместные операции
- Алгебраизация кванторов
$$\forall xP(x) \sim \bigwedge_{x \in X} P(x); \exists xP(x) \sim \bigvee_{x \in X} P(x)$$
- Логические отношения на полной булевой решетке – бесконечная дистрибутивность
- Логическое замыкание, редукция
- Аналогичные результаты

Применения

- Автоматическая оптимизация БЗ
- Верификация БЗ
- Построение эффективных процессоров обратного вывода
- Логические свойства императивных алгоритмов
- Исследование иерархий типов, рефакторинг в ООП
- Оптимизация условных СПТ