

Обобщенные кванторы в правдоподобных рассуждениях

О.М. Аншаков

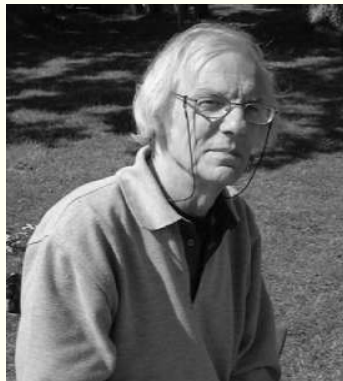
Российский государственный гуманитарный университет

Понятие обобщенного квантора
ввел А. Мостовский в работе



*Andrzej Mostowski. On a generalization of quantifiers.
Fund. Math., 44:12-36, 1957.*

Более удобное для практического использования определение обобщенного квантора дал П. Линдстрём в работе



Per Lindström. First order predicate logic with generalized quantifiers. Theoria, 32:186-195, 1966

Обобщенные кванторы для формализации правдоподобных рассуждений, используемых в интеллектуальном анализе данных, применили П.Гаек и Т.Гавранек в книге



Petr Hájek, Tomáš Havránek. Mechanizing Hypothesis Formation (Mathematical Foundations for a General Theory) Springer–Verlag 1978, 396 pp.

GUHA — сокращение от
General Unary Hypotheses Automaton

Первая публикация:

Hájek P., Havel, Chytil M.: The GUHA method of automatic hypotheses determination, Computing 1 (1966) 293–308.

Альтернативой статистическому подходу, реализованному в в GUHA-методе, является подход, основанный на формализации индукции, аналогии и абдукции, реализованный в ДСМ-методе, предложенном В.К.Финном в работе



Финн В. К. О машинно-ориентированной формализации правдоподобных рассуждений в стиле Ф. Бэкона – Д. С. Милля // Семиотика и информатика. — 1983. — Вып. 20. — С. 35–101.

ДСМ — сокращение от *Джон Стюарт Милль*

Первая публикация:

Финн В. К. О возможности формализации правдоподобных рассуждений средствами многозначных логик // Всесоюзн. симп. по логике и методологии науки. – Киев: Наукова думка, 1976. – С. 82-83.

Соединение технологий ДСМ-метода и GUNA-метода предложил П.А.Григорьев в работе



Григорьев П.А. Об одном методе автоматического порождения гипотез, схожем с ДСМ-методом: применение статистических соображений // НТИ. Сер. 2. — 1996. — № 5–6. — С. 52–55.

- ① *Аншаков О.М.* Обобщенные кванторы, определяемые с помощью шаблонов. Ч. I. НТИ, сер. 2, № 11, 2000, с. 5-17.
- ② *Аншаков О.М.* Обобщенные кванторы, определяемые с помощью шаблонов. Ч. II. НТИ, сер. 2, № 5, 2001, с. 35–48.

Обычные кванторы \forall и \exists суть обобщенные конъюнкция и дизъюнкция, соответственно.

Следовательно, обобщенные кванторы можно понимать как обобщения логических операций.

Обобщенный квантор Q над универсумом U будем понимать как отображение $Q: 2^U \rightarrow \{0, 1\}$.

Обобщенные кванторы

Пояснение

Путь $P(x)$ — одноместный предикат,

$$X = \{a \in U \mid P(a)\}$$

Тогда

$$Qx P(x) = \mathbf{1} \iff Q(X) = \mathbf{1}.$$

Обычные кванторы можно определить следующим образом:

$$\forall (X) = \begin{cases} \mathbf{1}, & X = U, \\ \mathbf{0}, & X \neq U, \end{cases}$$

$$\exists (X) = \begin{cases} \mathbf{1}, & X \neq \emptyset, \\ \mathbf{0}, & X = \emptyset. \end{cases}$$

Путь $P(x)$ — одноместный предикат,

$$X = \{a \in U \mid P(a)\}$$

Тогда

$$\forall x P(x) = \mathbf{1} \iff \forall (X) = \mathbf{1}$$

$$\iff X = U$$

$$\iff \{a \in U \mid P(a)\} = U$$

$$\iff P(a) \text{ для любого } a \in U.$$

Путь $P(x)$ — одноместный предикат,

$$X = \{a \in U \mid P(a)\}$$

Тогда

$$\exists x P(x) = 1 \iff \exists (X) = 1$$

$$\iff X \neq \emptyset$$

$$\iff \{a \in U \mid P(a)\} \neq \emptyset$$

$$\iff P(a) \text{ для некоторого } a \in U.$$

Еще несколько кванторов:

$$\exists_1 (X) = \begin{cases} \mathbf{1}, & |X| = 1, \\ \mathbf{0}, & |X| \neq 1, \end{cases}$$

$$\exists_2 (X) = \begin{cases} \mathbf{1}, & |X| = 2, \\ \mathbf{0}, & |X| \neq 2. \end{cases}$$

Пусть на U задана некоторая мера μ :

$$\text{MAJORITY}(X) = \begin{cases} \mathbf{1}, & \mu(X) > \mu(U \setminus X), \\ \mathbf{0}, & \mu(X) \leq \mu(U \setminus X), \end{cases}$$

$$\text{MINORITY}(X) = \begin{cases} \mathbf{1}, & \mu(X) < \mu(U \setminus X), \\ \mathbf{0}, & \mu(X) \geq \mu(U \setminus X). \end{cases}$$

Выше были приведены примеры кванторов типа $\langle 1 \rangle$ или унарных кванторов.

Бинарный квантор над универсумом U будем понимать как отображение $Q: 2^U \times 2^U \rightarrow \{0, 1\}$.

Аналогично могут быть определены кванторы большей арности.

Пусть $P_1(x)$ и $P_2(x)$ — одноместные предикаты,

$$X_1 = \{a \in U \mid P_1(a)\}, \quad X_2 = \{a \in U \mid P_2(a)\}.$$

Тогда

$$Qx (P_1(x), P_2(x)) = \mathbf{1} \iff Q(X_1, X_2) = \mathbf{1}.$$

Квантор классической импликации:

$$X_1 \Rightarrow X_2 = \begin{cases} \mathbf{1}, & X_1 \subseteq X_2, \\ \mathbf{0}, & X_1 \not\subseteq X_2, \end{cases}$$

Квантор ДСМ-импликации (с запретом на контрпример):

$$X_1 \Rightarrow_{\text{JSM}} X_2 = \begin{cases} \mathbf{1}, & |X_1 \cap X_2| \geq 2 \text{ и } X_1 \cap (U \setminus X_2) = \emptyset, \\ \mathbf{0}, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Классическая импликация

Пояснение

Пусть $P_1(x)$ и $P_2(x)$ — одноместные предикаты,

$$X_1 = \{a \in U \mid P_1(a)\}, \quad X_2 = \{a \in U \mid P_2(a)\}.$$

Тогда

$$(P_1(x) \Rightarrow_x P_2(x)) = \mathbf{1}$$

$$\iff (X_1 \Rightarrow X_2) = \mathbf{1}$$

$$\iff X_1 \subseteq X_2$$

$$\iff \{a \in U \mid P_1(a)\} \subseteq \{a \in U \mid P_2(a)\}$$

$$\iff \text{для любого } a \in U, P_1(a) \text{ влечет } P_2(a).$$

Квантор, использующий статистические соображения:

$$X_1 \Rightarrow_{\text{STAT}} X_2 = \begin{cases} \mathbf{1}, & \frac{\mu(X_1 \cap X_2)}{\mu(X_1)} \gg \frac{\mu((U \setminus X_1) \cap X_2)}{\mu(U \setminus X_1)}, \\ \mathbf{0}, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Спасибо за внимание!