НЕКОТОРЫЕ РАСШИРЕНИЯ ИНТЕРВАЛЬНОЙ ЛОГИКИ АЛЛЕНА

Г.С. Плесневич
Национальный исследовательский университет МЭИ

Интервальная темпоральная логика – это логика, в число примитивов которой входят интервалы на временной оси.

Интервальная логика Аллена **AL** – простейшая интервальная темпоральная логика

Джеймс Аллен, 1981 г.

James F. Allen. Maintaining knowledge about temporal intervals. Commun. of the ACM, 26(11), 1983.

Логика Халперна-Шохама, 1991

Применения логики Аллена:

- Диалоговые системы. Темпоральные базы знаний
- Искусственный интеллект. Рассуждения о действиях и событиях. Планирование действий агентов
- Роботика
- Бизнес-информатика. Потоки работ (workflows)
- Медицинская информатика. Терапевтические планы
- Биоинформатика. Геномика. Генетические карты

Базовые отношения между интервалами:

A ***b*** *B – A before (раньше) B*
A ***m*** *B – A meets (встречает) B*
A ***d*** *B – A during (в течение) B*
A ***o*** *B – A overlaps (перекрывает) B*
A ***s*** *B – A starts (начинает) B*
A ***f*** *B – A finishes (заканчивает) B*
A ***e*** *B – A equals (равняется) B*

Обратное отношение: $A\ \boldsymbol{\theta^*}\ B \Leftrightarrow B\ \boldsymbol{\theta}\ A$

Алленовские атомы:

$A\ \theta\ B,\quad \theta \in \Omega = \{\boldsymbol{b, m, o, f, s, d, e, b^*, m^*, o^*, f^*, s^*, d^*}\}$

Семантика алленовских атомов

<table>
<tr><td>A b B</td><td>|==A==| |==B==|</td><td>$A^+ < B^-$</td><td>$B^- - A^+ \ge 1$</td></tr>
<tr><td>A m B</td><td>|===A===|==B==|</td><td>$A^+ = B^-$</td><td>$A^+ = B^-$</td></tr>
<tr><td>A o B</td><td>|====A===|
|==B==|</td><td>$A^- < B^-, B^- < A^+, A^+ < B^+$</td><td>$B^- - A^- \ge 1, A^+ - B^- \ge 1, B^+ - A^+ \ge 1$</td></tr>
<tr><td>A f B</td><td>|==A==|
|====B====|</td><td>$B^- < A^-,\ A^+ = B^+$</td><td>$A^- - B^- \ge 1,\ A^+ = B^+$</td></tr>
<tr><td>A s B</td><td>|==A==|
|====B====|</td><td>$A^- = B^-,\ A^+ < B^+$</td><td>$A^- = B^-,\ B^+ - A^+ \ge 1$</td></tr>
<tr><td>A d B</td><td>|==A==|
|=====B=====|</td><td>$B^- < A^+,\ A^+ < B^+$</td><td>$A^+ - B^- \ge 1, B^+ - A^+ \ge 1$</td></tr>
<tr><td>A e B</td><td>|====A====|
|====B====|</td><td>$A^- = B^-,\ A^+ = B^+$</td><td>$A^- = B^-,\ A^+ = B^+$</td></tr>
</table>

Предложения логики Аллена: $A\ \omega\ B$, где $\omega \subseteq \Omega$

$A\{\boldsymbol{b,o^*,s}\}B \equiv A\ \boldsymbol{bo^*s}\ B \equiv A\ \boldsymbol{b}\ B \vee A\ \boldsymbol{o^*} B \vee A\ \boldsymbol{s}\ B$

$\equiv A\ \boldsymbol{b}\ B \vee B\ \boldsymbol{o}\ A \vee A\ \boldsymbol{s}\ B$

Алгебра Аллена

Композиция отношений из Ω:

$\sigma, \tau \in \Omega, \quad \sigma{\cdot}\tau \subseteq \Omega,$ ***b•f****

```
A b B          |===A===|    |===B===|
                                  |==C ==|     A b C
                            |=== C ====|     A m C
    B f*C               |======C====|     A o C
                |========C =======|     A s C
             |=========C========|     A d C
```

b·f* = ***bmosd***

$\omega_1 \subseteq \Omega, \; \omega_2 \subseteq \Omega, \quad \omega_1 \bullet \omega_2 = \bigcup\{\, \alpha \bullet \beta \mid \alpha, \beta \in \Omega\}$

Логическое следствие:

```
A b C, B b C   |===A===|    |===B===|    |==C==|
A o C, D o C          |========D=======|        B b D
```

{*A* ***b*** *B*, *B* ***b*** *C*, *A* ***o*** *D*, *D* ***o*** *C*} |= *B* ***b*** *D*

```
A b B, B m C   |===A===|    |===B===|==C==|
A o D, D o C          |=======D=======|        B b D
```

{*A* ***b*** *B*, *B* ***m*** *C*, *A* ***o*** *D*, *D* ***o*** *C*} |= *B* ***b*** *D*

{*A* ***b*** *C*, *B* ***bm*** *C*, *A* ***o*** *D*, *D* ***o*** *C*} |= *B* ***b*** *D*

Формально:

Интерпретация – функция

“_” : $\{A, B, C,\ldots\} \to \{(x,y) \mid x < y,\ x,y$ – целые неотриц.$\}$

“A” = (“A^-”,“A^+”)

“*A* ***b*** *B*” $\Leftrightarrow$ “A^+”< “B^-”,
“*A* ***m*** *B*” $\Leftrightarrow$ “A^+”= “B^-”,
“*A* ***s*** *B*” $\Leftrightarrow$ “A^-”= “B^-”, “A^+ < “B^+” и т.д.

“$A\ \omega\ B$” $\Leftrightarrow \bigvee\{$“$A\ \theta\ B$”$\mid\ \theta\in\omega\}$

Логическое следствие:

$\{\varphi_1, \varphi_2,\ldots, \varphi_n\} \models \psi \Leftrightarrow$ не существует интерпретации “_”, что
“φ_i”= 1 ($1 \le i \le n$) и “ψ”= 0

АЛГОРИТМ АЛЛЕНА

Правила вывода:

$$\frac{A\ \sigma\ B}{B\ \sigma^* A} \qquad \frac{A\ \sigma\ B \qquad B\ \tau\ C}{A\ \sigma{\bullet}\tau\ C} \qquad \frac{A\ \sigma\ B \qquad A\ \tau\ B}{A\ \sigma \cap \tau\ B}$$

D ***o*** *C*

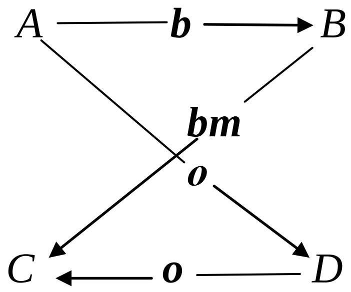
B ***bm*** *C*   *C* ***o**** *D*   *B* ***b**** *A*   *A* ***o*** *D*

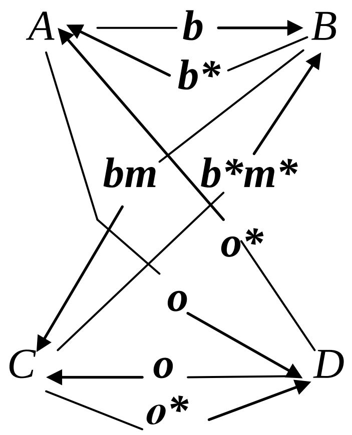
B ***bm·o**** *D*   *B* ***b*·o*** *D*

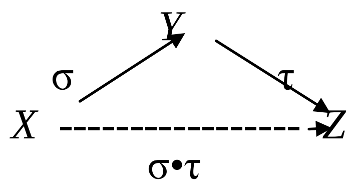
B ***bods*** *D*   *B* ***b*o*df*** *D*

B ***d*** *D*

O ={*A* ***b*** *B*, *B* ***bm*** *C*, *A* ***o*** *D*, *D* ***o*** *C*}







AL(***O***) = {*A* ***b*** *B*, *B* ***b**** *A*, *A* ***b*** *C*, *A* ***o*** *D*, *A* ***o*** *D*, *B* ***bm*** *C*,
C ***b*m**** *B*, *B* ***d*** *D*, *D* ***d**** *B*}

Алгоритм Аллена не полон: существуют онтологии ***O*** такие, что AL(***O***) не содержит некоторых логических следствий из ***O.***   Распознавание выполнимости онтологий в логике Аллена является NP-полной проблемой.   M.Vilain. H. Kautz, 1986.   Вычислительная сложность алгоритма Аллена O(n^3)

БУЛЕВО РАСШИРЕНИЕ ЛОГИКИ АЛЛЕНА

Логика **BAL**

В логике Аллена нельзя выразить утверждение «*A* раньше *B* или не заканчивает *C*», т.е. $A\ \boldsymbol{b}\ B \vee \sim A\ \boldsymbol{f}\ C$.

Предложения (формулы) **BAL** – булевы комбинации предложений логики **AL** с пропозициональными переменными. Например,

$\sim (A\ \boldsymbol{sob^*}B \rightarrow B\ \boldsymbol{mo^*}C \wedge p) \vee (q \rightarrow A\ \boldsymbol{o}\ C)$

Пример формализации в BAL

1) Имеются два агента. Первый агент может выполнять действия *a* и *b*, а второй – действие *c*.
2) Темпоральные интервалы *A*, *B*, *C* ассоциированы с действиями *a*, *b*, *c*.
3) Имеется условия *p* и *q*.

Знание:

4) Если верно *p*, то ни в какой момент времени действия *a* и *b* не совершаются одновременно.
5) Если верно *q*, то действие *b* совершается во время действия *c*.

Вопрос:

Какие отношения Аллена (из Ω) невозможны между действиями *c* и *a* в предположении, что оба условия *p* и *q* выполнены?

Ответ: ***e*, *f*, *s*, *d***

Формализация в логике BAL:

Онтология: $\boldsymbol{O} = \{p \rightarrow A\ \boldsymbol{bb^*}B,\ q \rightarrow B\ \boldsymbol{edfs}\ C\}$

Запрос: $?\ p \wedge q \rightarrow \sim C\ x\ A$

Найти отношение $x \in \Omega$ такое, что $\boldsymbol{O} \models p \wedge q \rightarrow \sim A\ x\ C$

Правила вывода для пропозициональных связок

$+\sim\varphi$ --------- $-\varphi$	$-\sim\varphi$ --------- $+\varphi$	$+\varphi\wedge\psi$ ---------- $+\varphi$ $+\psi$	$-\varphi\wedge\psi$ ---------- $-\varphi \mid -\psi$
$+\varphi\vee\psi$ --------- $+\varphi \mid +\psi$	$-\varphi\vee\psi$ --------- $-\varphi$ $-\psi$	$+\varphi\to\psi$ ----------- $-\varphi \mid +\psi$	$-\varphi\to\psi$ ---------- $+\varphi$ $-\psi$

$+\, p \to A$ ***bb*****B*** [4]
$+\, q \to B$ ***edfs*** *C* [5]
$-\, p \wedge q \to \sim C\ x\ A$ [1]
1: $+\, p \wedge q$ [2]
1: $-\sim C\ x\ A$ [3]
2: $+\, p$
2: $+\, q$
3: $+\, C\ x\ A$

4: $-\,p$ X | 4: $+\,A$ ***bb*****B***

5: $-\,q$ X | 5: $+\,B$ ***edfs*** *C* *

B = {*C x A*, *A* ***bb****B*, *B* ***edfs*** *C*}

Найти все $x \in \Omega$ такие, что множество ***B*** невыполнимо

Применение к ***B*** алгоритма Аллена:

bb*•edfs = ***b•e*** ∪ ***b•d*** ∪ ***b•f*** ∪ ***b•s*** ∪ ***b*•e*** ∪ ***b*•d*** ∪ ***b*•f*** ∪ ***b*•s*** =
bb*dfmm*oo*s
(***bb*•edfs***)* = ***bb*d*f*mm*oo*s****

	e	d	f	s
b	**b**	**bomds**	**bomds**	**b**
b*	**b***	**b*o*m*df**	**b***	**b*o*m*df**

C ***bb*d*f*mm*oo*s**** ∩ *x A* ∈ AL(***B***)
bb*dfmm*oo*s ∩ *x* = ∅ ⇔ *x* ∈ Ω \ ***bb*d*f*mm*oo*s**** = {***d***, ***f***, ***s***, ***e***}

Правила вывода для связок Аллена

$\dfrac{+\,A\ b\ B}{A^+ < B^-}$	$\dfrac{-\,A\ b\ B}{B^- \le A^+}$
$\dfrac{+\,A\ m\ B}{A^+ = B^-}$	$\dfrac{-\,A\ m\ B}{A^+ < B^- \mid B^- < A^+}$
$\dfrac{+\,A\ o\ B}{A^- < B^-}$ $B^- < A^+$ $A^+ < B^+$	$\dfrac{-\,(A\ o\ B)}{B^- \le A^- \mid A^+ \le B^- \mid B^+ \le A^+}$
$\dfrac{+\,A\ f\ B}{B^- < A^-}$ $A^+ = B^+$	$\dfrac{-\,A\ f\ B}{A^- \le B^- \mid A^+ < B^+ \mid B^+ < A^+}$
$\dfrac{+\,A\ s\ B}{A^- = B^-}$ $A^+ < B^+$	$\dfrac{-\,A\ s\ B}{A^- < B^- \mid B^- < A^- \mid B^+ \le A^+}$
$\dfrac{+\,A\ d\ B}{B^- < A^-}$ $A^+ < B^+$	$\dfrac{-\,A\ d\ B}{A^- \le B^- \mid B^+ \le A^+}$
$\dfrac{+\,A\ e\ B}{A^- = B^-}$ $A^+ = B^+$	$\dfrac{-\,A\ e\ B}{A^- < B^- \mid B^- < A^- \mid A^+ < B^+ \mid B^+ < A^+}$

$\dfrac{+A\ \theta\omega\ B}{+A\ \theta\ B\ \mid +A\omega\ B}$
$\theta \in \Omega, \quad \theta \subseteq \Omega$

$+ C\ x\ A$

$+A\ \boldsymbol{bb^*}B$ [1]

$+B\ \boldsymbol{edfs}\ C$

1: $+A\ \boldsymbol{b}\ B$ [2]
2: $A^+ < B^-$
*

1: $+A\ \boldsymbol{b^*}B$ [3]
3: $+B\ \boldsymbol{b}\ A$ [4]
4: $B^+ < A^-$
*

*

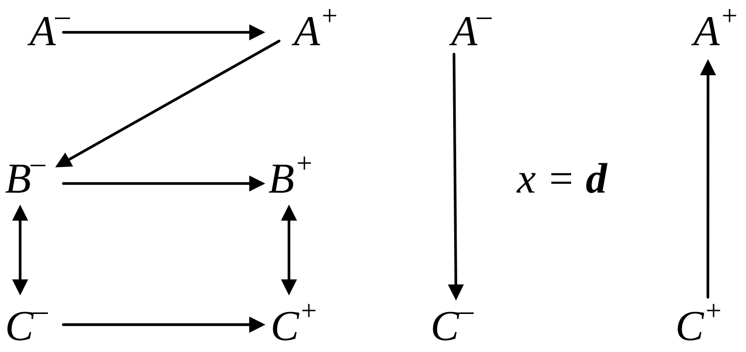
$+B\ \boldsymbol{e}\ C$ [5]	$+B\ \boldsymbol{d}\ C$ [6]	$+B\ \boldsymbol{f}\ C$ [7]	$+B\ \boldsymbol{s}\ C$ [8]
$B^- = C^-$	$B^- < A^-$	$B^- < A^-$	$A^- = B^-$
$B^+ = C^+$	$A^+ < B^+$	$A^+ = B^+$	$A^+ < B^+$

$S_1 = \{A^+ < B^-,\ B^- = C^-,\ B^+ = C^+,\ A^- < A^+,\ B^- < B^+,\ C^- < C^+\}$

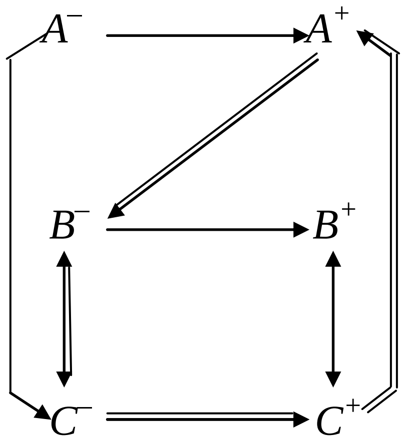
$S_2 = \{A^+ < B^-,\ B^- < A^-,\ A^+ < B^+,\ A^- < A^+,\ B^- < B^+,\ C^- < C^+\}$

:

$S_8 = \{B^+ < A^-,\ A^- = B^-,\ A^+ < B^+,\ A^- < A^+,\ B^- < B^+,\ C^- < C^+\}$



$x = \boldsymbol{d}$



$x = \boldsymbol{d}$

$A^+ < B^- = C^- < C^+ = A^+$, $\quad A^+ < A^+$ противоречие

МЕТРИЧЕСКОЕ БУЛЕВО РАСШИРЕНИЕ ИНТЕРВАЛЬНОЙ ЛОГИКИ АЛЛЕНА
Логика MBAL

A o B	|====***A***===| |==***B***==|	$A^- < B^-,\ B^- < A^+,\ A^+ < B^+$	$B^- – A^- \geq 1,\ A^+ – B^- \geq 1,\ B^+ – A^+ \geq 1$

```
|==============A==========|
                    |=============B============|
A⁻                  B⁻                    A⁺               B⁺
```

$$r_1 \leq B^- – A^- \leq s_1 \quad r_2 \leq A^+ – B^- \leq s_2 \quad r_3 \leq B^+ – A^+ \leq s_3$$

$$A\ \boldsymbol{o}(r_1 \leq B^- – A^- \leq s_1\,;\, r_2 \leq A^+ – B^- \leq s_2\,;\, r_3 \leq B^+ – A^+ \leq s_3)\ B$$

$$A\ o(B^- – A^- \geq 3;\ 2 \leq B^- – A^- \leq 4)\ B$$

Правила вывода для связок Аллена с ограничениями:

$\dfrac{+A\ \theta(\lambda)\ B}{+\lambda;[\theta]^\lambda}$	$\dfrac{–A\ \theta(\lambda)\ B}{–\ \lambda;[\theta]^\lambda}$
$\theta \in \Omega$, λ – метрическое ограничение, $[\theta]$ – последовательность неравенств, задающих семантику θ $[\theta]^\lambda$ – $[\theta]$ без неравенств вида $X – Y \geq 1$ (или $X – Y \geq 0$) таких, что $X – Y \geq r$	

$$\frac{+A\ \boldsymbol{o}(B^- – A^- \geq 3;\ B^- – A^- \geq 2\,;\, B^- – A^- \leq 4)\ B}{+B^- – A^- \geq 3;\ B^- – A^- \geq 2\,;\, B^- – A^- \leq 4;\ A^+ – B^- \geq 1;\ B^+ – A^+ \geq 1}$$

Правила вывода для атомарных ограничений

$\dfrac{+\,\boldsymbol{X - Y \geq r}}{\boldsymbol{X - Y \geq r}}$	$\dfrac{-\,\boldsymbol{X - Y \geq r}}{\boldsymbol{Y - X \geq 1 - r}}$
$\dfrac{+\,\boldsymbol{X - Y > r}}{\boldsymbol{X - Y \geq 1 + r}}$	$\dfrac{-\,\boldsymbol{X - Y > r}}{\boldsymbol{Y - X \geq - r}}$
$\dfrac{+\,\boldsymbol{X - Y \leq r}}{\boldsymbol{Y - X \geq - r}}$	$\dfrac{-\,\boldsymbol{X - Y \leq r}}{\boldsymbol{Y - X \geq 1 - r}}$
$\dfrac{+\,\boldsymbol{X - Y < r}}{\boldsymbol{Y - X \geq 1 - r}}$	$\dfrac{-\,\boldsymbol{X - Y < r}}{\boldsymbol{Y - X \geq - r}}$

Правила вывода для составных ограничений

$\dfrac{+\ \alpha_1; \alpha_2; \ldots; \alpha_n}{\begin{array}{c} +\ \alpha_1 \\ +\ \alpha_2 \\ \vdots \\ +\ \alpha_n \end{array}}$	$\dfrac{-\ \alpha_1; \alpha_2; \ldots; \alpha_n}{-\ \alpha_1 \mid -\ \alpha_2 \mid \ldots \mid -\ \alpha_n}$

Пример

Онтология:

$$\boldsymbol{O} = \{A\ \boldsymbol{b}(B^- - A^+ \geq a)\boldsymbol{m}\ B,\ B\ \boldsymbol{o}(b \leq C^- - B^- \leq c)\ C\}$$

Запрос: ?мах x: $A\ \boldsymbol{b}(C^- - A^+ \geq x)\ C$

Найти наибольшее x такое, что множество

$$\{+A\ \boldsymbol{b}(B^- - A^+ \geq a)\boldsymbol{m}\ B,\ +B\ \boldsymbol{o}(C^- - B^- \geq b;\ C^- - B^- \leq c)\ C,\ -A\ \boldsymbol{b}(C^- - A^+ \geq x)\ C\}$$

невыполнимо (противоречиво).

$+A\ \boldsymbol{b}(B^{-}-A^{+}\ge a)\boldsymbol{m}\ B$ [7]

$+B\ \boldsymbol{o}(C^{-}-B^{-}\ge b;\ C^{-}-B^{-}\le c)\ C$ [1]

$-A\ \boldsymbol{b}(C^{-}-A^{+}\ge x)\ C$ [11]

1: $+C^{-}-B^{-}\ge b;\ C^{-}-B^{-}\le c;\ B^{+}-C^{-}\ge 1;\ C^{+}-B^{+}\ge 1$ [2]

2: $+C^{-}-B^{-}\ge b$ [3]

2: $+C^{-}-B^{-}\le c$ [4]

2: $+B^{+}-C^{-}\ge 1$ [5]

2: $+C^{+}-B^{+}\ge 1$ [6]

3: $C^{-}-B^{-}\ge b$

4: $B^{-}-C^{-}\ge 1-c$

5: $B^{+}-C^{-}\ge 1$

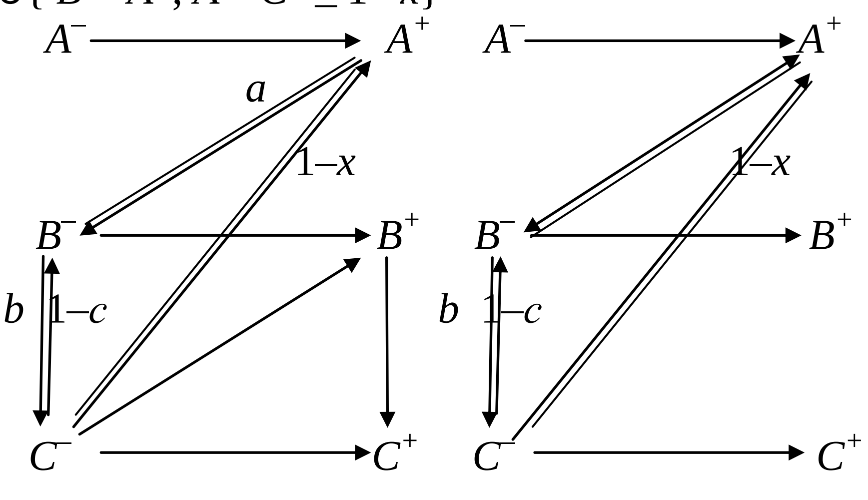
6: $C^{+}-B^{+}\ge 1$

7: $+A\ \boldsymbol{b}(B^{-}-A^{+}\ge a)\ B$ [8]	7: $+A\ \boldsymbol{m}\ B$ [9]
8: $+B^{-}-A^{+}\ge a$ [10]	9: $B^{-}=A^{+}$
10: $B^{-}-A^{+}\ge a$	12: $-C^{-}-A^{+}\ge x$ [13]
12: $-C^{-}-A^{+}\ge x$ [14]	13: $A^{+}-C^{-}\ge 1-x$
14: $A^{+}-C^{-}\ge 1-x$	

$$T = \{C^{-}-B^{-}\ge b,\ B^{-}-C^{-}\ge 1-c,\ B^{+}-C^{-}\ge 1,\ C^{+}-B^{+}\ge 1,\ A^{+}-A^{-}\ge 1,\ B^{+}-B^{-}\ge 1,\ C^{+}-C^{-}\ge 1\}$$

$$S_1 = T \cup \{B^{-}-A^{+}\ge a,\ A^{+}-C^{-}\ge 1-x\}$$

$$S_2 = T \cup \{B^{-}=A^{+},\ A^{+}-C^{-}\ge 1-x\}$$



$a+b+1-x\ge 1,\quad x\le a+b$ $\qquad$ $0+b+1-x\ge 1,\quad x\le b$

$$\max\{x \mid x\le a+b,\ x\le b\} = a+b$$

Ответ: $x\le a+b$

Система неравенств с дизъюнкциями

$\{+A\ \boldsymbol{b}(B^{-}-A^{+}\geq a)\boldsymbol{m}\ B,\ +B\ \boldsymbol{o}(C^{-}-B^{-}\geq b; C^{-}-B^{-}\leq c)\ C, -A\ \boldsymbol{b}(C^{-}-A^{+}\geq x)\ C\}$

Найти наибольшее x, при котором система неравенств

$$\begin{cases} (B^{-}-A^{+}\geq a)\vee(B^{-}-A^{+}\geq 0)\wedge(A^{+}-B^{-}\geq 0),\ C^{-}-B^{-}\geq b, \\ C^{-}-B^{-}\leq c,\ B^{+}-C^{-}\geq 1,\ C^{+}-B^{+}\geq 1,\ A^{+}-C^{-}\geq 1-x \end{cases}$$

несовместна

$$\left\{ \begin{array}{l} B^{-}-A^{+}\geq a,\ C^{-}-B^{-}\geq b,\ C^{-}-B^{-}\leq c,\ B^{+}-C^{-}\geq 1,\ C^{+}-B^{+}\geq 1,\ A^{+}-C^{-}\geq 1-x \\ (B^{-}-A^{+}\geq a),(A^{+}-B^{-}\geq 0), C^{-}-B^{-}\geq b,\ B^{+}-C^{-}\geq 1,\ C^{+}-B^{+}\geq 1,\ A^{+}-C^{-}\geq 1-x \\ (B^{-}-A^{+}\geq 0),(B^{-}-A^{+}\geq a), C^{-}-B^{-}\geq b,\ B^{+}-C^{-}\geq 1,\ C^{+}-B^{+}\geq 1,\ A^{+}-C^{-}\geq 1-x \\ (B^{-}-A^{+}\geq 0),(A^{+}-B^{-}\geq 0), C^{-}-B^{-}\geq b,\ B^{+}-C^{-}\geq 1,\ C^{+}-B^{+}\geq 1,\ A^{+}-C^{-}\geq 1-x \end{array} \right.$$

R.Dechter. Constraints processing. CA: Morgan Kaufmann, 2003

НЕЧЕТКОЕ БУЛЕВО РАСШИРЕНИЕ ЛОГИКИ АЛЛЕНА

Badaloni S, Giacomin M, A fuzzy extension of Allen's interval Algebra (2000)

Schockaert S, De Cock M, Kerre EE. Fuzzifying Allen's Temporal Interval Relations (2009)

Нечеткие интерпретации

Нечеткая интерпретация – функция

"_" : {Неравенства и равенства $X < Y, X = Y$} $\to$ [0,1]

$$\text{“}X < Y\text{”},\ \text{“}X=Y\text{”} \in [0,1]$$

Интерпретация "_" распространяется на **BAL**:

"A ***b*** B" = "$A^+ < B^-$",
"A ***m*** B" = "$A^+ = B^-$",
"A ***o*** B" = min{"$A^- < B^-$", "$B^- < A^+$", "$A^+ < B$"},
"A ***f*** B"= min{"$B^- < A^-$", "$A^+ = B^+$"},
"A ***s*** B"= min{"$A^- = B^-$", "$A^+ < B^+$"},
"A ***d*** B" = min{"$B^- < A^+$", "$A^- < A^+$", "$A^+ < B^+$"},
"A ***e*** B" = min{"$A^- = B^-$", "$A^+ = B^+$"}.
"$\sim \varphi$" = 1– "φ",
"$\varphi \wedge \psi$" = min{"φ", "ψ"},
"$\varphi \vee \psi$" = max{"φ", "ψ"},
"$\varphi \to \psi$" = max{1–"φ", "ψ"}.

Согласованность нечеткой интерпретации с семантикой неравенств и равенств:

Пусть σ и τ – пропозициональные формулы, составленные из неравенств и равенств и формула σ → τ истинна. Тогда "σ" ≤ "τ"

$(X \le Y) \wedge (Y \le Z) \to (X \le Z)$, "$(X \le Y) \wedge (Y \le Z)$" ≤ "$X \le Z$"

min{"$X \le Y$", "$Y \le Z$)" ≤ "$X \le Z$"

Правила вывода для пропозициональных связок

$\dfrac{\sim\varphi > t}{\varphi < 1-t}$	$\dfrac{\sim\varphi < t}{\varphi > 1-t}$
$\dfrac{\varphi \wedge \psi > t}{\begin{array}{c}\varphi > t \\ \psi > t\end{array}}$	$\dfrac{\varphi \wedge \psi < t}{\varphi > t \mid \psi > t}$
$\dfrac{\varphi \vee \psi > t}{\varphi > t \mid \psi > t}$	$\dfrac{\varphi \vee \psi < t}{\begin{array}{c}\varphi > t \\ \psi > t\end{array}}$
$\dfrac{\varphi \rightarrow \psi > t}{\varphi < 1-t \mid \psi > t}$	$\dfrac{\varphi \rightarrow \psi < t}{\begin{array}{c}\varphi < 1-t \\ \psi > t\end{array}}$

Правила вывода для связок Аллена

$\dfrac{A\ \mathbf{b}\ B > t}{(A^{+} < B^{-}) > t}$	$\dfrac{A\ \mathbf{b}\ B < t}{(A^{+} < B^{-}) < t}$
$\dfrac{A\ \mathbf{m}\ B > t}{(A^{+} = B^{-}) > t}$	$\dfrac{A\ \mathbf{m}\ B > t}{(A^{+} = B^{-}) > t}$
$\dfrac{A\ \mathbf{o}\ B > t}{\begin{array}{c}(A^{-} < B^{-}) > t \\ (B^{-} < A^{+}) > t, \\ (A^{+} < B^{+}) > t\end{array}}$	$\dfrac{A\ \mathbf{o}\ B < t}{(A^{-} < B^{-}) > t \mid (B^{-} < A^{+}) > t \mid A^{+} < B^{+}) > t}$
$\dfrac{A\ \boldsymbol{f}\ B > t}{\begin{array}{c}(B^{-} < A^{-}) > t \\ (A^{+} = B^{+}) > t\end{array}}$	$\dfrac{A\ \boldsymbol{f}\ B < t}{(B^{-} < A^{-}) < t \mid (A^{+} = B^{+}) < t}$
$\dfrac{A\ \mathbf{s}\ B > t}{\begin{array}{c}(A^{-} = B^{-}) > t \\ (A^{+} < B^{+}) > t\end{array}}$	$\dfrac{A\ \mathbf{s}\ B < t}{(A^{-} = B^{-}) > t \mid (A^{+} < B^{+}) > t}$

$\dfrac{A \ \mathbf{d} \ B > t}{(B^{-} < A^{-}) > t \quad (A^{+} < B^{+}) > t}$	$\dfrac{A \ \mathbf{d} \ B < t}{(B^{-} < A^{-}) < t \mid (A^{+} < B^{+}) < t}$
$\dfrac{A \ \mathbf{e} \ B > t}{(A^{-} = B^{-}) > t \quad (A^{+} = B^{+}) > t}$	$\dfrac{A \ \mathbf{e} \ B < t}{(A^{-} = B^{-}) < t \mid (A^{+} = B^{+}) < t}$

$\boldsymbol{O} = \{ p \wedge A\ \boldsymbol{b}\ B \geq a_1,\ \ p \rightarrow B\ \boldsymbol{m}\ C \geq a_2 \}$

Запрос: $?\max x:\ p \wedge A\ \boldsymbol{b}\ C < x$

$\boldsymbol{p \wedge A\ b\ B \geq a_1}$ [1]

$\boldsymbol{p \rightarrow B\ m\ C \geq a_2}$ [3]

$\boldsymbol{p \wedge A\ b\ C < x}$ [6]

1: $\boldsymbol{p \geq a_1}$ [4] [7] T3(2) [9]

1: $\boldsymbol{A\ b\ B \geq a_1}$ [2]

2: $\boldsymbol{(A^+ < B^-) \geq a_1}$ [11]

3: $\boldsymbol{p \leq 1 - a_2}$ [4]

4: $\boldsymbol{a_1 + a_2 \geq 1}$

6: $\boldsymbol{p < x}$ [7] 6: $\boldsymbol{A\ b\ C < x}$ [8]

9: $\boldsymbol{x \leq a_1}$ 8: $\boldsymbol{(A^+ < C^-) < x}$

3: $\boldsymbol{B\ m\ C \geq a_2}$ [5]

5: $\boldsymbol{(B^+ = C^-) \geq a_2}$ [11]

6: $\boldsymbol{p < x}$ [9] 6: $\boldsymbol{A\ b\ C < x}$ [10]

9: $\boldsymbol{x \leq a_1}$ 10: $\boldsymbol{(A^+ < C^-) < x}$ [11]

11: $\boldsymbol{(A^+ < C^-) \geq \min\{a_1, a_2\}}$ [12]

12: $\boldsymbol{x \leq \min\{a_1, a_2\}}$

Ответ:

$$g(a_1,a_2) = \begin{cases} 0 \text{ if } a_1 + a_2 < 1 \\ \min\{a_1,a_2\} \text{ if } a_1 + a_2 \geq 1 \end{cases}$$