УДК 510.66
doi:10.18720/SPBPU/2/id21-157

***Кулик Борис Александрович***,
вед. н. сотр., д-р физ.-мат. наук, ст. н. сотр.

# ВЫВОД СЛЕДСТВИЙ С ПРЕДВАРИТЕЛЬНО ЗАДАННЫМИ СВОЙСТВАМИ

Россия, Санкт-Петербург,
ФГБУН Институт проблем машиноведения РАН, ba-kulik@yandex.ru

***Аннотация***. В дедуктивном анализе на основе математической логики актуальны две основные задачи: проверка правильности предполагаемого следствия и вывод следствия с предварительно заданными свойствами. Основной теоретический потенциал математической логики направлен на решение первой задачи. Что касается задачи поиска «интересных» следствий, то для нее практически отсутствуют какие-либо полезные наработки. В настоящей работе предложены методы решения задачи вычисления следствий с заданными свойствами на основе алгебры кортежей.

***Ключевые слова***: логический вывод, интересные следствия, алгебра кортежей, правило обобщения, минимальное следствие, проекция, элиминация атрибутов.

***Boris A. Kulik***,
Leading Scientific Researcher, Dr. Sci. (Phys.–Math.), Senior Researcher

# INFERENCE OF CONSEQUENCES WITH PREDEFINED PROPERTIES

Institute for Problems in Mechanical Engineering of the Russian Academy of Sciences, St. Petersburg, Russia, ba-kulik@yandex.ru

***Abstract***. In deductive analysis based on mathematical logic, two main tasks are relevant: checking the correctness of the intended consequence and the conclusion of the consequence with predefined properties. The main theoretical potential of mathematical logic is aimed at solving the first problem. As for the task of finding “interesting” consequences, there are practically no useful developments for it. In this paper, we propose methods for solving the problem of calculating consequences with given properties based on the n-tuple algebra.

***Keywords***: logical inference, interesting consequences, n-tuple algebra, generalization rule, minimal consequence, projection, attribute elimination.

## Введение

На практике для проверки правильности следствия часто используются такие методы, как метод резолюций, аналитических или семантических таблиц [1, 5], и т. д. Однако подобные методы не пригодны для решения задачи вывода следствий с заданными свойствами (иногда их называют интересными следствиями), так как они предполагают следствие уже известным. Постановку задачи поиска интересных следствий можно найти в [4]. Там же утверждается, что использование правил вывода для решения этой задачи практически нереализуемо, так как число возможных следствий бесконечно. Требуются иные методы, которые к настоящему времени не найдены. В данном докладе предлагается сравнительно простой метод решения этой задачи, в основе которого лежат законы алгебры кортежей [2, 6].

## 1. Краткие сведения из алгебры кортежей

Алгебра кортежей (АК) представляет собой универсальную алгебру многоместных отношений, в основе которой используются свойства ***декартова произведения*** (ДП) множеств. Отношения в АК можно представить с помощью четырех типов структур (***АК-объектов***). АК-объекты интерпретируются как области истинности формул математической логики. Вместо логических связок $\wedge$, $\vee$, $\supset$ и $\neg$ в АК используются соответствующие операции алгебры множеств с многоместными отношениями, а вместо кванторов – операции с атрибутами.

Каждый АК-объект погружен в определенное пространство ***атрибутов***. Множество всех значений атрибута называется его ***доменом***. Имена АК-объектов содержат идентификатор, к нему приписана заключенная в прямые скобки последовательность имен атрибутов, определяющих ***схему отношения***, в которой задан этот АК-объект. Например, имя $R[XYZ]$ означает, что АК-объект $R$ содержится в пространстве $X \times Y \times Z$. АК-объекты, заданные в одном и том же пространстве атрибутов, называются ***однотипными***.

Структуры АК матричные, причем в ячейках матриц записываются не элементы, а ***компоненты***, т. е. подмножества соответствующих атрибутов. При преобразовании АК-объектов в формулы математической логики компоненты АК-объектов соответствуют одноместным предикатам, а сами АК-объекты — формулам или многоместным предикатам.

***С-кортеж*** — это ограниченный прямыми скобками кортеж компонент, который можно представить как обычное отношение, если вычислить ДП этих компонент.

Например, АК-объект $T[XYZ] = [A * B]$ является $C$-кортежем, при этом $A \subseteq X$, $B \subseteq Z$, а компонента “$*$” — ***полная компонента***, ее значение равно домену соответствующего атрибута (в данном случае, поскольку она находится на второй позиции, то $* = Y$). Этот $C$-кортеж можно преобразовать в обычное отношение с помощью ДП следующим образом: $T[XYZ] = A \times Y \times B$. Он соответствует формуле $T(x, z) = A(x)\ \&\ B(z)$, в которой областями истинности одноместных предикатов $A(x)$ и $B(z)$ являются компоненты $A$ и $B$.

***C*-система** — это объединение однотипных $C$-кортежей, которое записывается в виде матрицы, ограниченной прямыми скобками.

Так, $R[XYZ]=\begin{bmatrix} A_1 & * & A_3 \\ B_1 & B_2 & * \end{bmatrix}$ есть $C$-система, при этом $A_1 \subseteq X$, $A_3 \subseteq Z$ и т. д. Данная $C$-система преобразуется в обычное отношение с помощью ДП следующим образом: $R[XYZ] = (A_1 \times Y \times A_3) \cup (B_1 \times B_2 \times Z)$. $C$-системе в математической логике соответствует дизъюнктивная нормальная форма (ДНФ).

Если АК-объект преобразуется в обычное отношение, то элементы этого отношения называются ***элементарными кортежами***. Они соответствуют ***выполняющим подстановкам*** соответствующей логической формулы.

С помощью $C$-кортежей и $C$-систем можно выразить любое многоместное отношение, но для вычисления их дополнений требуются новые структуры — $D$-кортежи и $D$-системы. Для определения этих АК-объектов используется промежуточная структура — диагональная $C$-система.

***Диагональная С-система*** – это $C$-система размерности $n \times n$, у которой все недиагональные компоненты – полные ($*$).

Например, $Q[XYZ]=\begin{bmatrix} A & * & * \\ * & B & * \\ * & * & C \end{bmatrix}$ — диагональная $C$-система.

Доказано, что диагональная $C$-система есть результат вычисления дополнения некоторого $C$-кортежа. В частности, $Q[XYZ]$ есть дополнение $C$-кортежа $[\overline{A}\ \ \overline{B}\ \ \overline{C}]$, где $\overline{A} = X \setminus A$, $\overline{B} = Y \setminus B$, $\overline{C} = Z \setminus C$.

***D-кортеж*** — это диагональная $C$-система, записанная как ограниченный перевернутыми прямыми скобками кортеж ее диагональных компонент.

Например, изображенную выше диагональную $C$-систему можно записать как $D$-кортеж: $Q[XYZ] = ]A\ B\ C[$. Ясно, что дополнение $Q[XYZ]$ равно $C$-кортежу $[\overline{A}\ \ \overline{B}\ \ \overline{C}]$.

***D-система*** — это матрица компонент, ограниченная перевернутыми прямыми скобками, в которой строками являются $D$-кортежи.

С помощью $D$-систем легко вычислять дополнение $C$-систем. Для этого достаточно заменить все компоненты $C$-системы их дополнениями, а обычные прямые скобки — перевернутыми. Дополнение полной компоненты $*$ есть компонента $\varnothing$ – ***пустая компонента***.

Например, дополнение $C$-системы $P[XYZ]=\begin{bmatrix} A & * & C \\ D & E & * \end{bmatrix}$ вычисляется как $D$-система $\overline{P}[XYZ]=\left]\begin{matrix} \overline{A} & \varnothing & \overline{C} \\ \overline{D} & \overline{E} & \varnothing \end{matrix}\right[$. Используя закон де Моргана можно доказать, что $D$-система — это пересечение содержащихся в ней $D$-кортежей. В математической логике $D$-системе соответствует конъюнктивная нормальная форма (КНФ).

Компоненты $\varnothing$ и $*$ названы в АК ***фиктивными компонентами***.

***Универсум АК-объекта*** (***U***) определяется как ДП доменов атрибутов, заданных в его схеме отношения. Например, для АК-объекта $R[XYZ]$ универсум есть $\boldsymbol{U} = X \times Y \times Z$.

Если при вычислении установлено, что некоторая $C$-система равна универсуму, то она соответствует ***общезначимой формуле***, если же некоторая $D$-система окажется равной пустому множеству, то она соответствует ***тождественно ложной формуле*** или ***противоречию***.

Правила выполнения операций объединения и пересечения для $C$- и $D$-структур сформулированы и обоснованы в [2, 6]. Также в АК предложены алгоритмы проверки включения одних типов АК-объектов в другие и алгоритмы преобразования $C$-структур в $D$-структуры и обратно.

Кванторные операции в АК выполняются с помощью простых ***операций с атрибутами***. К ним, в частности, относятся ***добавление фиктивного атрибута*** (*+Atr*) и ***элиминация атрибута*** (*–Atr*). Рассмотрим эти операции.

Операция *+Atr* выполняется как добавление имени нового атрибута в схему отношения АК-объекта и соответствующего нового столбца с фиктивными компонентами в матричное представление. Например, пусть $R_k[XZ]=\begin{bmatrix} A_1 & A_3 \\ B_1 & B_3 \end{bmatrix}$. Тогда после добавления фиктивного атрибута $Y$ в $R_k[XZ]$ получим АК-объект $+Y(R_k[XZ])=\begin{bmatrix} A_1 & * & A_3 \\ B_1 & * & B_3 \end{bmatrix}$. При выполнении операции *+Atr* в $C$-структуры добавляются фиктивные компоненты “$*$”, а в $D$-структуры — фиктивные компоненты “$\varnothing$”.

Операция *+Atr* соответствует ***правилу обобщения*** (*Gen*) в исчислении предикатов [3].

Операция *+Atr* используется также для приведения АК-объектов с разными схемами отношений к одной схеме отношения за счет добавления недостающих фиктивных атрибутов. С учетом этого введены ***обобщенные операции*** пересечения ($\cap_G$) и объединения ($\cup_G$), отличающиеся от обычных одноименных операций алгебры множеств тем, что перед их выполнением АК-объекты приводятся к одной схеме отношения с помощью операции $+Atr$.

Обобщенные операции $\cap_G$ и $\cup_G$ семантически равносильны логическим связкам конъюнкции и дизъюнкции. Аналогично вводятся ***обобщенные отношения*** ($\subseteq_G$ и $=_G$). Доказано, что ***АК с обобщенными операциями и отношениями изоморфна алгебре множеств***.

Операция элиминации атрибута $-Atr$ выполняется как удаление из схемы отношения имени этого атрибута, а из матричного представления — столбца его значений. Логический смысл этой операции в отличие от $+Atr$ уже зависит от типа АК-объекта. Пусть задан АК-объект $R[XYZ]$, и ему соответствует логическая формула $F(x,y,z)$. Если $R[XYZ]$ — $C$-кортеж или $C$-система, то $-Y(R[XYZ])$ равносильно $\exists y(F(x,y,z))$, а если $R[XYZ]$ – $D$-кортеж или $D$-система, то $-Y(R[XYZ])$ равносильно $\forall y(F(x,y,z))$. Все эти соотношения строго доказаны [2, 6].

Применение операции $-Atr$ к $C$-кортежу или $C$-системе позволяет вычислить ***проекцию*** АК-объекта. Если, допустим, задана $C$-система $R[XYZ]$, то ее проекции обозначаются соответственно $\mathrm{Pr}_{XY}(R)$, $\mathrm{Pr}_Y(R)$, $\mathrm{Pr}_{XZ}(R)$ и т. д. В частности, проекция $\mathrm{Pr}_Y(R)$, вычисляется с помощью элиминации двух атрибутов: $-Z(-X(R[XYZ]))$. Для любого АК-объекта $R[\ldots]$ доказано соотношение

$$R[\ldots] \subseteq_G \mathrm{Pr}_{\boldsymbol{V}}(R), \tag{1}$$

где $\boldsymbol{V}$ — произвольное подмножество атрибутов из схемы отношения АК-объекта $R[\ldots]$. Если АК-объект выражен как $D$-кортеж или $D$-система, то для вычисления проекции его необходимо предварительно преобразовать в $C$-систему.

С проекциями АК-объектов тесно связано понятие фиктивного атрибута, содержащегося в отношении. Пусть задан АК-объект $R[\boldsymbol{W}]$, где $\boldsymbol{W}$ — множество атрибутов, среди которых присутствует атрибут $X$, и $\mathrm{Pr}_{\boldsymbol{W}\setminus X}(R)$ — проекция АК-объекта $R[\boldsymbol{W}]$, в которой присутствуют все атрибуты, кроме $X$. Тогда $X$ есть ***фиктивный атрибут*** в $R[\boldsymbol{W}]$, если соблюдается следующее равенство

$$R[\boldsymbol{W}] = +X(\mathrm{Pr}_{\boldsymbol{W}\setminus X}(R)). \tag{2}$$

В АК предложен и обоснован новый метод проверки правильности следствия. Пусть посылки рассуждения записаны в виде АК-объектов $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Тогда логическая формула, представленная АК-объектом $B$, будет следствием этих посылок, если и только если соблюдается соотношение:

$$(A_1 \cap_G A_2 \cap_G \ldots \cap_G A_n) \subseteq_G B. \tag{3}$$

АК-объект, полученный в результате вычисления выражения в левой части (3) называется в АК ***минимальным следствием***. Как показано ниже, с его помощью можно получить следствия с заранее заданными свойствами.

## 2. Свойства «интересных» следствий

Многочисленные примеры задач логического вывода [3, 5, 7] характеризуются тем, что весьма часто проверяемые следствия содержат сравнительно небольшой по сравнению с исходными данными состав переменных.

В знаменитой задаче Steamroller (№ 47 в [7]), которая является иллюстрацией сложности логического вывода, при формализации получается всего три логически переменных, но в ней сокращение осуществляется для предикатов, используемых в этой задаче. К этим предикатам относятся «волки», «лисы», «растения», «меньше» и т. д. Следствие этой задачи содержит три предиката, в то время как в посылках формулируется 10 разных предикатов.

Таким образом, *одно из свойств «интересных» следствий – сокращенный по сравнению с исходными данными состав переменных или предикатов*.

Второе свойство интересных следствий тесно связано с первым: в некоторых случаях интерес представляют не только следствия с сокращенным составом переменных, но и следствия, в которых используются определенные переменные. Отсюда ясно, что *вторым свойством «интересных» следствий является определенный состав переменных или предикатов в сокращенном следствии*.

## 3. Методы вычисления «интересных» следствий

Если использовать традиционный способ дедуктивного анализа с помощью правил вывода, то для получения следствий с определенными свойствами требуется перебор большого числа вариантов, так как заранее невозможно предсказать результат применения правил. Поэтому возникает необходимость разработки более эффективных методов вычисления следствий с заранее заданными свойствами.

В АК задача существенно упрощается. Когда задано множество АК-объектов $\{A_1, \ldots, A_n\}$, представляющих аксиомы (или посылки), то можно найти минимальное следствие $A = A_1 \cap_G \ldots \cap_G A_n$. Тогда для получения любого следствия достаточно построить АК-объект $B$ такой, чтобы выполнялось соотношение $A \subseteq_G B$. Из (1) следует, что любая проекция $A$ является его следствием. Отсюда ясно, что одним из методов вывода следствий с сокращенным составом атрибутов является вычисление проекций $A$.

Если $A$ — $C$-система, то любую ее проекцию легко вычислить с помощью элиминации атрибутов. При этом не всякая проекция представляет интересное следствие, так как могут быть проекции, равные универсуму — в этом случае они не содержат полезной информации.

Рассмотрим пример. Пусть даны посылки

$$1)\ A \supset C;\ \ 2)\ B \supset C;\ \ 3)\ A \vee B. \tag{4}$$

Требуется вычислить следствия с сокращенным составом атрибутов. Чтобы применить аппарат АК, положим, что $A$, $B$ и $C$ — атрибуты, домены которых равны $\{0, 1\}$. Тогда посылки можно выразить в виде $D$-системы

$$P[ABC] = \left] \begin{matrix} \{0\} & \varnothing & \{1\} \\ \varnothing & \{0\} & \{1\} \\ \{1\} & \{1\} & \varnothing \end{matrix} \right[ .$$

После преобразования $P[ABC]$ в $C$-систему (см. [2, 6]) получим

$$P[ABC] = \begin{bmatrix} \{1\} & \{0\} & \{1\} \\ * & \{1\} & \{1\} \end{bmatrix}.$$

Сначала рассмотрим проекции с одним атрибутом. Ясно, что проекции $\mathrm{Pr}_A(P)$ и $\mathrm{Pr}_B(P)$ полные, т. е. объединение компонент этих проекций равно универсуму. Однако проекция $\mathrm{Pr}_C(P)$ неполна, т. е. равна $[\{1\}]$. Отсюда ясно, что формула $C$ является следствием посылок (4).

Если рассматривать проекции с двумя атрибутами, то получим следующие результаты:

1) проекция $\mathrm{Pr}_{AB}(P)$ неполная, но она соответствует формуле $A \vee B$, которая является одной из посылок, т.е. ничего нового не представляет.

2) проекции $\mathrm{Pr}_{AC}(P)$ и $\mathrm{Pr}_{BC}(P)$ неполные, но в них содержатся фиктивные атрибуты (соответственно $A$ и $B$), поэтому сами по себе они интереса не представляют.

В то же время неполные проекции с фиктивными атрибутами можно использовать для получения новых следствий с сокращенным составом атрибутов. Для этого достаточно добавить в нее новые элементарные кортежи, при условии, что в результате такого добавления данная проекция не станет полной, а присутствующий в ней фиктивный атрибут перестанет быть фиктивным.

Например, проекция $\mathrm{Pr}_{BC}(P)$ содержит всего 2 элементарных кортежа, в то время как ее универсум содержит 4. Если добавить в нее $C$-кортеж $Q_1[BC] = [\{1\} \ \ \{0\}]$, то получим $C$-систему, которая соответствует формуле $\neg B \supset C$. Таким образом, эта формула является сокращенным следствием посылок (4). В то же время, если в эту же проекцию добавить $C$-кортеж $Q_2[BC] = [\{0\} \ \ \{0\}]$, то получим $C$-систему, которая соответствует формуле $B \supset C$, т. е. является одной из посылок.

***Алгоритм* 1 (*вывода следствий с сокращенной схемой отношения*)**:

1) вычислить минимальное следствие $A$ из заданных посылок;
2) если $A$ – $D$-система, то перейти к шагу 5;
3) найти в $A$ неполные проекции;

4) минимизировать проекции, найденные на шаге 3, с помощью обнаружения и элиминации фиктивных атрибутов;

5) преобразовать $A$ в $C$-систему и перейти к шагу 3.

6) *Конец алгоритма*.

Для получения информативных следствий в проекциях с фиктивными атрибутами можно использовать следующий алгоритм. Пусть $R[\boldsymbol{W}]$ – неполная проекция минимального следствия $A$, в которой содержится фиктивный атрибут $X$.

***Алгоритм 2*** (***вывода следствий с сокращенной схемой отношения для проекций с фиктивным атрибутом*** $X$):

1) для $R[\boldsymbol{W}]$ вычислить проекцию $\mathrm{Pr}_{\boldsymbol{W}\setminus X}[R]$;

2) вычислить дополнение этой проекции $\overline{\mathrm{Pr}_{\boldsymbol{W}\setminus X}[R]}$ (тем самым мы получим множество элементарных кортежей, которые можно использовать для построения сокращенных следствий без фиктивного атрибута в проекции $[\boldsymbol{W}]$);

3) в проекции $[\boldsymbol{W}\setminus X]$ выбрать АК-объект $Q_1$ такой, чтобы соблюдалось $Q_1[\boldsymbol{W}\setminus X] \subseteq \overline{\mathrm{Pr}_{\boldsymbol{W}\setminus X}[R]}$;

4) в проекции $[X]$ выбрать компоненту $S_i$, не равную домену атрибута $X$; построить $C$-кортеж $Q_2[X] = [S_i]$;

5) вычислить АК-объект $(Q_1[\boldsymbol{W}\setminus X] \cap_G Q_2[X]) \cup R[\boldsymbol{W}]$.

6) *Конец алгоритма*.

***Задача поиска следствий с заданным составом атрибутов V*** решается также с помощью вычисления проекций минимального следствия $A$. Но здесь недостаточно вычислить проекцию $[\boldsymbol{V}]$, так как может оказаться, что проекция $\mathrm{Pr}_{\boldsymbol{V}}(A)$ полная, т. е. равна универсуму проекции $[\boldsymbol{V}]$. Тем не менее, при этом в $A$ может существовать неполная проекция, в составе атрибутов которой находятся все атрибуты из множества $\boldsymbol{V}$.

Например, в $C$-системе $R[WXYZ] = \begin{bmatrix} \{0\} & * & \{0\} & \{1\} \\ \{1\} & \{1\} & * & \{0\} \\ \{1\} & \{0\} & \{1\} & \{1\} \end{bmatrix}$, заданной в универсуме $\{0, 1\}^4$, проекция $[WX]$ полная, в то время как проекция $[WXY]$ неполна и не содержит фиктивных атрибутов.

Пусть по условиям задачи требуется, чтобы следствие содержало множество $\boldsymbol{V}$ атрибутов и при этом выясняется, что в минимальном следствии проекция $[\boldsymbol{V}]$ полная. Если требуется, чтобы следствие содержало только эти атрибуты, то определенное решение отсутствует. Если в искомом следствии можно не ограничиваться только элементами множества $\boldsymbol{V}$, то с помощью добавления других атрибутов к множеству $\boldsymbol{V}$ необходимо выполнить поиск неполных проекций, содержащих $\boldsymbol{V}$ в качестве строгого подмножества. Найденные проекции будут решениями задачи.

Если в *C*-системах поиск «интересных» следствий выполняется с помощью элиминации атрибутов, то в *D*-кортежах и *D*-системах элиминация атрибутов вызывает обратный эффект, так как получаются АК-объекты, удовлетворяющие соотношению $-X(A) \subset A$ и поэтому не являющиеся следствиями. Но в *D*-системах есть другой простой способ получения АК-объектов, содержащих *A* в качестве подмножества. Для этого достаточно удалить некоторые строки *D*-системы. Результат такого действия с точки зрения получения следствий с заданными свойствами трудно предсказать заранее, но при удалении строк получится *D*-система меньшей размерности, поэтому ее проще преобразовать в *C*-систему для того, чтобы иметь возможность легко вычислять проекции.

## Заключение

Предложены алгоритмы поиска следствий с сокращенным (по сравнению с исходной системой посылок), либо с заранее заданным составом переменных.

Во всех случаях используется понятие минимального следствия, представляющего собой обобщенное пересечение АК-объектов, которые моделируют посылки. «Интересные» следствия либо равны минимальному следствию, либо являются неполными проекциями минимального следствия.

## Благодарности

Работа частично поддержана РФФИ (проект № 19-08-00079).

### Список литературы

1. Вагин В.Н., Головина Е.Ю., Загорянская А.А., Фомина М.В. Достоверный и правдоподобный вывод в интеллектуальных системах / Под ред. В.Н. Вагина, Д.А. Поспелова. – 2-е издание, дополненное и исправленное. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2008. – 712 с.

2. Кулик Б.А. Логика и математика: просто о сложных методах логического анализа / Под общ. ред. А.Я. Фридмана. – СПб.: Политехника, 2020. – 141 с.

3. Мендельсон Э. Введение в математическую логику. – М.: «Наука», 1971. – 320 с.

4. Шалак В.И. Анализ vs дедукция // Логические исследования. – 2018. – Т. 24, № 1. – С. 26-45.

5. Чень Ч., Ли Р. Математическая логика и автоматическое доказательство теорем. – М., Наука. 1983. – 360 с.

6. Kulik B., Fridman A. N-ary Relations for Logical Analysis of Data and Knowledge. IGI Global. 2017. – 297 p.

7. Pelletier F.J. Seventy-Five Problems for Testing Automatic Theorem Provers // Journal of Automated Reasoning. – 1986. – Vol. 2. – Pp. 191–216.