ИЗВЕСТИЯ РАН. ТЕОРИЯ И СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2007, № 1, с. 118–127

ИСКУССТВЕННЫЙ ИНТЕЛЛЕКТ

УДК 658.012.011..56

ВЕРОЯТНОСТНАЯ ЛОГИКА НА ОСНОВЕ АЛГЕБРЫ КОРТЕЖЕЙ

© 2007 г. Б. А. Кулик
Санкт-Петербург, Институт проблем машиноведения РАН
Поступила в редакцию 10.01.06 г.

Известное в искусственном интеллекте понятие "вероятностная логика" нуждается в более строгом обосновании. Предлагается новый подход к построению вероятностной логики на основе разработанной автором алгебры кортежей. Дается краткое введение в алгебру кортежей и обобщаются ее свойства, обеспечивающие эффективное распараллеливание при машинной реализации алгоритмов решения задач логического анализа систем. Рассматриваются методы решения прямой и обратной задач вероятностного моделирования логических систем.

Введение. Алгебра кортежей (АК), в основе которой лежат известные свойства декартовых произведений [1], была разработана для решения некоторых задач искусственного интеллекта, в частности, для моделирования логических систем и уменьшения трудоемкости алгоритмов логического вывода [2, 3]. Основы АК и возможности ее использования при вероятностном моделировании изложены в [4–6]. Дальнейшие исследования этой системы показали, что класс решаемых на ее основе задач может быть существенно расширен. Кроме того, структуры АК сравнительно легко программируются и обладают естественным параллелизмом, поэтому их применение в программно-аппаратном обеспечении логического и логико-вероятностного анализа систем позволяет существенно уменьшить расходы на разработку программ и требуемые вычислительные ресурсы.

В статье дается краткое введение в АК с учетом корректировки некоторых ранее введенных терминов, а также рассматриваются ее возможности при решении обратной задачи логико-вероятностного анализа, т.е. восстановления вероятностных распределений простых событий на основе данных о вероятностях сложных событий. Подобные задачи были поставлены в рамках вероятностной логики [7–9].

1. Основные понятия и структуры АК. АК содержит ряд определений и более 30 теорем, с помощью которых решаются следующие задачи:

1) обосновывается ее изоморфизм с такими системами, как теория многоместных отношений и исчисление высказываний и предикатов;

2) осуществляется погружение этой системы в вероятностное пространство;

3) разрабатывается алгоритмическая база для решения разнообразных задач логического анализа систем (логического вывода, поиска корректных гипотез и "скрытых аксиом", вероятностного анализа и т.д.).

Чтобы не обращаться к первоисточникам [2–6], здесь вкратце приведены основные понятия и соотношения АК, необходимые для понимания вероятностных соотношений. Кроме того, написание этого раздела вызвано некоторым, на взгляд автора, более удачным, изменением в прежней терминологии.

В основе АК лежит понятие гибкого универсума. Пусть задана совокупность различных множеств, называемых *сортами*. Каждому сорту приписывается некоторое множество имен (*атрибутов*) (в предыдущих публикациях по АК вместо этого термина использовался не совсем удачный термин "координата"). *Доменом* каждого атрибута является множество, равное соответствующему сорту. В математической логике доменам атрибутов отвечают области определения переменных. *Гибкий универсум* состоит из совокупности *частных универсумов* – декартовых произведений доменов для заданной последовательности атрибутов. Последовательность атрибутов, определяющих данный частный универсум, называется *схемой отношения*.

АК содержит всего 5 структур (*АК-объектов*): элементарный кортеж; C-кортеж; C-система; D-кортеж и D-система. АК-объекты, сформированные в одном и том же частном универсуме, называются *однотипными*.

Предположим, что задан частный универсум в виде декартова произведения $S = X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n$ произвольных множеств. Наглядно S можно представить как *пространство* признаков с *атрибутами* X_i. Домены этих атрибутов соответствуют *шкалам* признаков. Тогда в пространстве S можно сформировать следующие подструктуры:

1) *проекции* – подпространства, в которых используются только отдельные атрибуты из множества атрибутов, образующих S;

2) декартовы произведения в заданной схеме отношения: образующими компонентами этих декартовых произведений служат некоторые подмножества множеств X_i, представленных в заданной схеме отношения.

Рассмотрим примеры этих подструктур. Пусть $S = X \times Y \times Z$, где $X = \{a, b, c, d\}$, $Y = \{f, g, h\}$, $Z = \{a, b, c\}$. Проекциями данного пространства могут быть декартовы произведения $X \times Y$, $X \times Z$ и т.д. или одиночные множества, например X. Для простоты будем считать, что в этой системе каждому сорту соответствует единственный атрибут.

В пределах пространства S или какой-либо его проекции можно задать соответствующие подструктуры в виде декартовых произведений. Например, в S в качестве такой подструктуры выступает декартово произведение $R[XYZ] = \{b, d\} \times \{f, h\} \times \{a, b\}$. Здесь выражение $[XYZ]$ является схемой отношения. Нетрудно убедиться, что $R \subset S$ (свойство декартовых произведений). Аналогично некоторое подмножество элементарных кортежей проекции $Y \times Z$ представимо как декартово произведение $Q[YZ] = \{f, g\} \times \{a, c\}$. Декартовы произведения отражают множества элементарных кортежей – эти множества при необходимости можно перечислить, хотя при выполнении операций со структурами АК это необязательно.

Элементарный кортеж – элемент декартова произведения или его проекции, т.е. последовательность из элементов, каждый из которых принадлежит домену соответствующего атрибута. Например, декартово произведение $Q[YZ] = \{f, g\} \times \{a, c\}$ содержит следующее множество элементарных кортежей: $\{(f, a), (f, c), (g, a), (g, c)\}$.

C-кортежем называется кортеж, заданный в полном пространстве или в какой-либо его проекции, с компонентами, образованными подмножествами соответствующих доменов атрибутов. C-кортеж интерпретируется как декартово произведение этих компонент, т.е. как некоторое множество элементарных кортежей. Для обозначения C-кортежей используются прямые скобки. Например, приведенные выше отношения R и Q можно представить как C-кортежи: $R[XYZ] = [\{b, d\}\ \{f, h\}\ \{a, b\}]$; $Q[YZ] = [\{f, g\}\ \{a, c\}]$.

C-кортеж, у которого имеется хотя бы одна пустая компонента, является пустым. В АК, если речь идет о моделях исчисления высказываний или предикатов, это утверждение принято в качестве аксиомы, для которой имеется соответствующая интерпретация, основанная на свойствах декартовых произведений.

Чтобы обобщить операции, которые часто приходится выполнять со структурами с разными схемами отношений, вводятся *фиктивные компоненты*. Они бывают двух видов, одна из них используется в C-кортежах и обозначается "*". Другую фиктивную компоненту ($\varnothing$), участвующую в D-кортежах, рассмотрим позднее. Фиктивные компоненты "*" обозначают множества, равные доменам соответствующих атрибутов, их можно вставить в определенный C-кортеж вместо отсутствующих атрибутов и тем самым ввести в него новые атрибуты. Например, C-кортеж $Q[YZ] = [\{f, g\}\ \{a, c\}]$ записываются в схеме отношения $[XYZ]$ в виде C-кортежа $[*\{f, g\}\ \{a, c\}]$, используя фиктивную компоненту. Поскольку фиктивная компонента в Q отвечает атрибуту X, то справедливо равенство $[*\{f, g\}\ \{a, c\}] = [\{a, b, c, d\}\ \{f, g\}\ \{a, c\}]$.

Пересечение однотипных C-кортежей осуществляется покомпонентно: результатом этой операции является C-кортеж, содержащий пересечения компонент исходных C-кортежей, относящихся к одному и тому же атрибуту, например $[\{b, d\}\ \{f, h\}\ \{a, b\}] \cap [*\ \{f, g\}\ \{a, c\}] = [\{b, d\}\ \{f\}\ \{a\}]$.

Результатом пересечения C-кортежей может оказаться пустое множество (пустой C-кортеж) $[\{b, d\}\ \{f, h\}, \{a, b\}] \cap [*\{g\}\ \{a, c\}] = \varnothing$, так как пересечение вторых компонент этих C-кортежей образует пустое множество.

Многие отношения, заданные как подмножества декартова произведения, не всегда удается отобразить с помощью единственного C-кортежа. Поэтому целесообразно ввести универсальную структуру, полученную объединением C-кортежей. C-системой называется структура, являющаяся объединением произвольного числа однотипных C-кортежей. C-системы так же, как и C-кортежи, ограничиваются прямыми скобками. Например, для заданного выше пространства S можно определить некоторое отношение P как C-систему

$$P[XYZ] = \begin{bmatrix} \{a, d\} & * & \{b, c\} \\ \{b, d\} & \{f, h\} & \{a, c\} \\ \{b, c\} & \{g\} & \{b\} \end{bmatrix}.$$

Проверка включения одного C-кортежа (C_m) в другой (C_n) осуществляется покомпонентно: $C_m = C_n$ тогда и только тогда, когда все компоненты C_m включены в соответствующие компоненты C_n. На основе свойств декартовых произведений можно определить условия, при которых объединение двух С-кортежей C_m и C_n преобразуется в один С-кортеж. Этих условий два:

1) если $C_m \subseteq C_n$, то $C_m \cup C_n = C_n$;

2) если C_m и C_n отличаются только в одной (i-й) компоненте, то $C_m \cup C_n$ выражается как один C-кортеж, сохраняющий неизменными все компоненты за исключением i-й, которая становится равной объединению соответствующих компонент из C_m и C_n.

Зная, как получить пересечение C-кортежей, можно сформулировать алгоритм для отыскания пересечения C-кортежа с C-системой и C-системы с C-системой. Для этого нужно представить

C-кортежи как обычные множества, элементами которых являются однотипные элементарные кортежи. Тогда C-система, содержащая C-кортежи A, B, …, L, – объединение этих множеств. Исходя из этого, используя законы алгебры множеств, в частности законы дистрибутивности, нетрудно сформулировать алгоритмы вычисления пересечений соответствующих структур.

А л г о р и т м 1. Расчет пересечения C-кортежа P с C-системой Q:

1) вычислить пересечения C-кортежа P с каждым C-кортежем из Q;

2) из полученных результатов исключить пустые C-кортежи;

3) из оставшихся кортежей сформировать C-систему;

4) конец алгоритма.

А л г о р и т м 2. Оценка пересечения C-системы P с C-системой Q;

1) вычислить пересечения каждого C-кортежа из P с каждым C-кортежем из Q;

2) из полученных результатом исключить пустые C-кортежи;

3) из оставшихся кортежей сформировать C-систему;

4) конец алгоритма.

В качестве примера рассмотрим пересечение двух C-систем, заданных на определенном ранее пространстве S (это означает, что символ “*” на второй позиции C-кортежей соответствует множеству $X_2 = \{f, g, h\}$)

$$P[XYZ] = \begin{bmatrix} \{a, b, d\} & \{f, h\} & \{b\} \\ \{b, c\} & * & \{a, c\} \end{bmatrix},$$

$$Q[XYZ] = \begin{bmatrix} \{a, d\} & * & \{b, c\} \\ \{b, d\} & \{f, h\} & \{a, c\} \\ \{b, c\} & \{g\} & \{b\} \end{bmatrix}.$$

1. Вычисляем пересечение всех пар C-кортежей, содержащихся в разных C-системах:

$$[\{a, b, d\}\ \{f, h\}\ \{b\}] \cap [\{a, d\}\ *\ \{b, c\}] = $$
$$= [\{a, d\}\ \{f, h\}\ \{b\}];$$

$$[\{a, b, d\}\ \{f, h\}\ \{b\}] \cap [\{a, d\}\ \{f, h\}\ \{a, c\}] = \varnothing;$$

$$[\{a, b, d\}\ \{f, h\}\ \{b\}] \cap [\{b, c\}\ \{g\}\ \{b\}] = \varnothing;$$

$$[\{b, c\}\ *\ \{a, c\}] \cap [\{a, d\}\ *\ \{b, c\}] = \varnothing;$$

$$[\{b, c\}\ *\ \{a, c\}] \cap [\{b, d\}\ \{f, h\}\ \{a, c\}] = $$
$$= [\{b\}\ \{f, h\}\ \{a, c\}];$$

$$[\{b, c\}\ *\ \{a, c\}] \cap [\{b, c\}\ \{g\}\ \{b\}] = \varnothing.$$

2. Из оставшихся непустых C-кортежей формируем C-систему:

$$P \cap Q = \begin{bmatrix} \{a, d\} & \{f, h\} & \{b\} \\ \{b\} & \{f, h\} & \{a, c\} \end{bmatrix}.$$

Даже этот сравнительно несложный пример показывает нам некоторые возможности уменьшения трудоемкости алгоритмов за счет использования алгебры кортежей: тот же результат можно получить, если предварительно перевести исходные C-системы в множества элементарных кортежей. Но при этом трудоемкость вычислений увеличится, так как C-система P содержит 24 элементарных кортежа, C-система Q – 20, а C-система $P \cap Q$ – 8.

Объединения C-кортежей и C-систем вычисляются намного проще. Для этого надо из объединяемых структур сформировать новую C-систему, включающую все C-кортежи этих структур. После этого в отдельных случаях можно объединить некоторые C-кортежи. Необходимо только не забывать, что реализуемые алгоритмы объединения и пересечения, а также проверки включения структур АК имеют смысл только в тех случаях, когда эти структуры однотипны или преобразованы в однотипные структуры с помощью добавления фиктивных атрибутов.

Если требуется вычислить *дополнение* C-кортежа, то, используя традиционные методы теории многоместных отношений, необходимо выполнить следующие операции:

1) “развернуть” (т.е. разложить на элементарные кортежи) C-кортеж R и соответствующий ему частный универсум S;

2) из “развернутого” S исключить поодиночке все элементарные кортежи, содержащиеся в R.

Ясно, что такая операция в общем случае весьма трудоемка, однако она существенно упрощается, если воспользоваться нижеследующими соотношениями. Определим сначала, что такое *дополнение компоненты C-кортежа.* Если многоместное отношение определено в пространстве, каждый атрибут которого представлен некоторым множеством, то очевидно, что универсумом для компоненты C-кортежа является домен соответствующего ей атрибута (частный универсум), а дополнением компоненты служит множество, содержащее все элементы этого частного универсума, не принадлежащие данной компоненте. Например, в пространстве $S = X \times$

$\times Y \times Z$ задан C-кортеж $R = [R_1\ R_2\ R_3]$. Тогда соответственно $\overline{R}_1 = X\backslash R_1$; $\overline{R}_2 = Y\backslash R_2$; $\overline{R}_3 = Z/R_3$.

Следующая теорема выводится из свойств декартова произведения [1].

Т е о р е м а. *Дополнением C-кортежа $T = [R_1\ R_2 \ldots R_n]$ является C-система*

$$C = \begin{bmatrix} \overline{R_1} & * & \ldots & * \\ * & \overline{R_2} & \ldots & * \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ * & * & \ldots & \overline{R_n} \end{bmatrix}$$

размерности $n \times n$, в которой каждая диагональная компонента выступает дополнением соответствующей компоненты C-кортежа T, а все остальные компоненты – фиктивные.

Рассмотрим пример. Пусть в упомянутом выше пространстве $S = X \times Y \times Z$ задан C-кортеж $T = [\{b, d\}\ \{f, h\}\ \{a, b\}]$. Тогда его дополнением в соответствии с теоремой 1 будет C-система

$$\overline{T} = \begin{bmatrix} X\backslash\{b, d\} & * & * \\ * & Y\backslash\{f, h\} & * \\ * & * & Z\backslash\{a, b\} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \{a, c\} & * & * \\ * & \{g\} & * \\ * & * & \{c\} \end{bmatrix}.$$

C-системы, изображающие дополнение C-кортежа по теореме 1, можно представить как один кортеж множеств, используя для обозначения *перевернутые* прямые скобки. Тогда получается равенство

$$\overline{T} = \begin{bmatrix} \{a, c\} & * & * \\ * & \{g\} & * \\ * & * & \{c\} \end{bmatrix} = \,]\ \{a, c\}\ \{g\}\ \{c\}\ [.$$

Такое "сокращенное" представление диагональной C-системы образует новую структуру АК, которая называется *D-кортежем*. Оказывается, эта структура не только позволяет компактно отобразить диагональные C-системы, но самостоятельно используется в некоторых операциях и поисковых запросах. Термины "C-кортеж" и "D-кортеж" выбраны не случайно: в простейшем случае C-кортеж соответствует конъюнкции, а D-кортеж – дизъюнкции одноместных предикатов с разными переменными. Используя D-кортежи, можно сформировать еще одну (пятую) структуру АК – D-систему.

D-система – структура, подобная матрице, в строках которой находятся однотипные D-кортежи, которая интерпретируется как пересечение множеств элементарных кортежей, содержащихся в этих D-кортежах.

Изображение D-системы аналогично изображению C-системы, только вместо обычных прямых скобок используются перевернутые. Например, дополнение C-системы

$$F[XYZ] = \begin{bmatrix} \{a, b, d\} & \{f, h\} & \{b\} \\ \{b, c\} & * & \{a, c\} \end{bmatrix},$$

заданной в пространстве S, можно представить как D-систему

$$\overline{F} = \left]\begin{matrix} X\backslash\{a, b, d\} & Y\backslash\{f, h\} & Z\backslash\{b\} \\ X\backslash\{b, c\} & Y\backslash * & Z\backslash\{a, c\} \end{matrix}\right[=$$

$$= \left]\begin{matrix} \{c\} & \{g\} & \{a, c\} \\ \{a, d\} & \varnothing & \{b\} \end{matrix}\right[.$$

Таким образом, D-система *двойственна* (по законам де Моргана) C-системе и является *пересечением* D-кортежей. Разработаны алгоритмы преобразования D-кортежей и D-систем в эквивалентные им C-системы.

Полная аналогия между структурами АК и формулами *исчисления предикатов* легко доказуема. Рассмотрим лишь некоторые основные. В исчислении предикатов C-кортежу в тривиальном случае (когда отдельные атрибуты не соотносятся с многоместными отношениями) отвечает конъюнкция одноместных предикатов с разными переменными. Например, логической формуле $H = P_1(x) \wedge P_2(y) \wedge P_3(z)$ соответствует C-кортеж $P[XYZ] = [P_1\ P_2\ P_3]$, где $P_1 \subseteq X$; $P_2 \subseteq Y$; $P_3 \subseteq Z$. Отрицанию формулы H (*дизъюнкции* одноместных предикатов) $\neg H = \neg P_1(x) \vee \neg P_2(y) \vee \neg P_3(z)$ – D-кортеж $\overline{P} = \,]\ \overline{P}_1\ \overline{P}_2\ \overline{P}_3\ [$. Пусть АК-объект обозначает *тождественно ложную формулу*.

АК-объект, равный некоторому частному универсуму, интерпретируется как *тавтология*. Непустой АК-объект указывает на *выполнимую формулу*. Элементарный кортеж, входящий в состав непустого АК-объекта, соответствует *выполняющей подстановке* логической формулы.

Если в C-кортеж или в C-систему вводится фиктивный атрибут, то эта процедура подобна известному в исчислении предикатов правилу вывода, которое называется *правилом обобщения*. Например, если АК-объект

$$G[XZ] = \begin{bmatrix} \{a, c\} & * \\ \{a, c, d\} & \{b, c\} \end{bmatrix}$$

соответствует формуле $F(x, z)$ исчисления предикатов, то, добавив в этот АК-объект фиктивный атрибут Y, получим АК-объект

$$G_1[XYZ] = \begin{bmatrix} \{a, c\} & * & * \\ \{a, c, d\} & * & \{b, c\} \end{bmatrix}$$

для формулы $\forall yF(x, z)$ из $F(x, z)$ по правилу обобщения.

Помимо операций алгебры множеств с АК-объектами вводятся еще три *операции с атрибутами*: 1) перестановка атрибутов и соответствующих им столбцов матрицы АК-объекта; 2) добавление нового фиктивного атрибута; 3) элиминация атрибута. Исполняются также две *кванторные операции* $\exists x(P)$ и $\forall x(P)$, которые не только распознают тождественную ложность или выполнимость некоторой структуры, но в случае выполнимости позволяют получить АК-объект, соответствующий данному выражению. Определенные комбинации операций с атрибутами и операций алгебры множеств дают возможность сравнительно легко осуществлять обращение, композицию, соединение отношений, логический вывод и операции с кванторами. Подробнее об этом см. в [4–6].

2. Экономия ресурсов при машинной реализации структур АК. Вычислительная сложность операций алгебры множеств и проверок включения зависит от того, к какому классу структур относятся используемые при этом АК-объекты. Например, проверка включения C-кортежа в C-сис-тему выполняется в общем случае с помощью алгоритма экспоненциальной вычислительной сложности, в то время как алгоритм проверки включения C-кортежа и даже C-системы в D-систему имеет полиномиальную сложность. Для реализации некоторых операций и проверок требуется преобразование АК-объекта в эквивалентный ему АК-объект альтернативного класса (например, C-системы в D-систему или наоборот), что для C- и D-систем достигается с помощью алгоритмов экспоненциальной сложности. Операция дополнения АК-объекта во всех случаях обеспечивается алгоритмом полиномиальной вычислительной сложности, но при этом система преобразуется в альтернативный класс. Операции пересечения и объединения АК-объектов, относящихся к одному классу, выполняются алгоритмами полиномиальной сложности, но если они относятся к разным классам, то для этих операций требуется преобразование одного из них в другой класс.

В задачах, которые известны в логике как задачи дедуктивного вывода, часто требуется проверка включения одного АК-объекта в другой, а также исполнение кванторных операций. В табл. 1 приведены различные сочетания АК-объектов и знаком "+" помечены сочетания, для которых алгоритмы реализации соответствующих операций являются полиномиальными при условии, что все домены атрибутов описываются простыми множествами (т.е. немногоместными отношениями). При этом во всех случаях проверка того, содержится ли заданный элементарный кортеж в любой структуре, требует алгоритма полиномиальной сложности.

Однако в рамках АК разработаны методы уменьшения трудоемкости экспоненциальных по вычислительной сложности алгоритмов, а также методы распознавания частных случаев структур, которые позволяют выполнить соответствующие операции, преобразования и проверки за полиномиальное время. Но даже в тех случаях, когда нет возможности использовать алгоритм полиномиальной вычислительной сложности, уменьшение требуемых вычислительных ресурсов достигается за счет использования присущего АК-объектам естественного параллелизма.

В отличие от традиционных структур данных, применяющихся при машинной реализации логического и логико-вероятностного анализа систем, структуры АК являются *матрицеподобными*, что делает возможным при соответствующей программно-аппаратной реализации сравнительно легко уменьшить требуемые вычислительные ресурсы с помощью распараллеливания операций.

Машинная реализация АК-объектов использует параллелизм на следующих уровнях: 1) компонент; 2) строк и 3) матриц. *На уровне компонент* можно представить домены и их подмножества в виде совокупности логических векторов и для реализации операций алгебры множеств и проверок включения применять логические опе-

Таблица 1

Действие	C-кортеж	C-систем	D-кортеж	D-система
Проверка включения C-кортежа	+		+	+
Проверка включения C-системы	+		+	+
Проверка включения D-кортежа	+		+	+
Проверка включения D-системы				
Кванторная операция $\forall x$	+		+	+
Кванторная операция $\exists x$	+	+	+	

рации с целыми векторами. *На уровне строк* удается одновременно осуществлять операции или проверки включения со всеми парами компонент C- или D-кортежей. *На уровне матриц* можно одновременно выполнять операции алгебры множеств и проверки включения для множества пар, элементами которых являются строки (C- или D-кортежи) из разных АК-объектов. Например, при вычислении пересечения C-системы с C-системой (см. алгоритм 2) все используемые в этом алгоритме операции пересечения C-кортежей можно запускать параллельно.

3. Логика и вероятность. Термин "вероятностная логика" получил большое распространение после выхода в свет статьи известного специалиста по искусственному интеллекту (ИИ) Н. Нильсона [7]. Его идея была продолжена и развита [8, 9]. В этих и других публикациях по вероятностной логике ставилась следующая задача: заданы оценки вероятностей некоторого множества событий, представленных формулами исчисления высказываний, необходимо найти вероятностную оценку события, представленного логической формулой, которая отличается от исходных. Другой аспект совмещения вероятности и логики, например, тот, который реализован в логико-вероятностных методах (ЛВМ) [10], где вероятность формул вычисляется по вероятностям значений логических переменных, в этих работах не рассматривался. Кроме того, анализ статей [7–9] показывает, что результатом соединения классических понятий "вероятность" и "логика" оказываются некоторые неклассические логики. Нами же предлагается рассмотреть концепцию вероятностной логики в классическом варианте через призму алгебры кортежей.

Совмещение понятий "логика" и "вероятность" вызывает немало трудностей. На первый взгляд, здесь все просто, если взять за основу аксиоматику вероятности, предложенную А.Н. Колмогоровым [11], в которой алгебра событий, погруженных в вероятностную меру, соответствует алгебре множеств. Например, для событий, представленных множествами A и B, вероятностная мера их объединения рассчитывается как

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B).$$

Таким образом, для точного вычисления вероятности события $A \cup B$ помимо вероятностей $p(A)$ и $p(B)$ необходимо знать вероятность $p(A \cap B)$, которая в рамках некоторых ограничений, в частности $p(A \cap B) \le \min(p(A), p(B))$, не зависит от $p(A)$ и $p(B)$. Если при этом $A \cap B \ne \varnothing$, то события A и B зависимы. Но если представить, что A и B являются не множествами, а разными логическими переменными, то вероятность дизъюнкции этих событий определяется по формуле

$$p(A \vee B) = p(A) + p(B) - p(A)p(B),$$

для которой достаточно задать только вероятность событий A и B.

Спрашивается, почему для логических соотношений имеет место другая методика расчета вероятности, хотя многим представляется, что алгебра множеств и булева алгебра изоморфны? Ответ на этот вопрос оказывается ключевым при совмещении понятий "логика" и "вероятность". Дело в том, что в классической логике элементарные события, отвечающие разным логическим переменным, несовместимы, потому что любая логическая формула, содержащая n свободных переменных, изоморфна некоторому n-местному отношению, и события, соответствующие различающимся переменным, принадлежат разным атрибутам. Другими словами, логические переменные могут быть зависимыми, но не изначально, а только потому, что они содержатся в определенной логической формуле, которая и определяет зависимость между ними.

Абсурдность (с точки зрения математической логики) иного подхода видна из следующего примера, который иногда приводится в работах по вероятностной логике: для логических переменных (но не формул!) X и Y даются вероятности $p(X)$, $p(Y)$ и $p(X \wedge Y)$, причем последняя вероятность необязательно равна произведению предыдущих.

Отсюда ясно, что при погружении логических систем в вероятностное пространство необходимо учитывать, что речь идет о системе, изоморфной в соответствии с аксиоматикой А.Н. Колмогорова алгебре множеств, но при этом сами множества по структуре являются множествами кортежей, содержащихся в многоместных отношениях.

Именно это обстоятельство, явно или неявно учитываемое в АК и ЛВМ, не учитывается в различных версиях вероятностной логики. Предположение о том, что события, соответствующие разным логическим переменным, могут быть зависимыми сами по себе, т.е. без учета связывающей их логической формулы, означает нарушение законов математической логики. Другое дело, когда речь идет о самих формулах, в которых устанавливается зависимость между различными переменными, или о разных логических формулах, которые могут быть зависимыми только при условии, что они содержат хотя бы одну общую для них свободную переменную.

4. Вероятностный анализ систем на основе АК. Рассмотрим методы вероятностного моделирования с помощью АК более подробно. Основным структурообразующим понятием АК является C-кортеж. Если известны вероятностные меры компонент C-кортежа, то мера самого C-кортежа вычисляется как произведение мер его компонент. Так, когда C-кортеж $R = [A\ B\ C]$ задан в измеримых атрибутах и меры его компонент равны соответственно $\mu(A)$, $\mu(B)$ и $\mu(C)$, то

$$\mu(R) = \mu(A)\ \mu(B)\ \mu(C).$$

Если речь идет о погружении логических формул в вероятностное пространство, то все атрибуты пространства, в котором задана совокупность АК-объектов, имеют меру 1, а все АК-объекты этого пространства – меры, не превышающие 1. Это соответствует вероятностной мере не только по числовым соотношениям, но и потому, что система событий, моделируемых с помощью АК, изоморфна алгебре множеств.

Для вычисления мер АК-объектов, отличающихся от C-кортежей, необходима их *ортогонализация*, т.е. преобразование в эквивалентную C-систему, в которой пересечение любой пары C-кортежей образует пустое множество. Методы ортогонализации произвольных АК-объектов разработаны; подробнее о них – в [2–6]. При этом мера ортогональной C-системы в точности равна сумме мер всех содержащихся в ней C-кортежей. Кроме того, установлена следующая закономерность: *ортогонализация позволяет не только подготовить АК-объект к расчету его вероятности, но во многих случаях существенно уменьшить трудоемкость вычислений при решении других задач (например, при решении задачи выполнимости).*

Если АК-объект – отображение формул исчисления высказываний, то он задан в универсуме $\{0, 1\}^n$, где n – число логических переменных формулы. Каждый столбец C-кортежа или C-системы "привязан" к определенной логической переменной. Столбцу с номером k соответствует переменная x_k, литералу x_k в формуле – состояние 1 в АК-объекте, а литералу – x_k – состояние 0. Каждая строка (C-кортеж) в C-системе отвечает конъюнкции формулы, выраженной как лизъюнктивная нормальная форма (ДНФ). Если в каком-либо конъюнкте отсутствуют переменные, входящие в состав формулы, то вместо них в C-кортеже вставляется фиктивная переменная "*".

П р и м е р 1. Пусть задана формула исчисления высказываний

$$F_Q = (x_1 \wedge \neg x_3) \vee (\neg x_2 \wedge x_3) \vee (\neg x_1 \wedge x_2). \quad (4.1)$$

Поскольку здесь три логических переменных, то эту формулу можно представить как АК-объект Q в универсуме $\{0, 1\}^3$

$$Q = \begin{bmatrix} \{1\} & * & \{0\} \\ * & \{0\} & \{1\} \\ \{0\} & \{1\} & * \end{bmatrix}$$

Данная формула и соответствующий ей АК-объект являются ортогональными, поэтому Q непосредственно выразим в вероятностной мере. Пусть в АК-объекте Q вероятности событий заданы так: p_i – вероятность события 1 в i-м атрибуте, $1 - p_i$ – вероятность события 0 в i-м атрибуте. Учитывая, что мера C-кортежа равна произведению мер его компонент, а мера ортогональной C-системы – сумме мер содержащихся в ней C-кортежей, получим

$$p(Q) = p_1(1-p_3) + (1-p_2)p_3 + (1-p_1)p_2. \quad (4.2)$$

В ЛВМ конструкция (4.2) называется *вероятностной функцией* (ВФ) формулы (4.1). Эту функцию можно также вывести из ортогональной C-системы с помощью замены элементов компонент на соответствующие им вероятности и преобразования системы в полином. На первый взгляд кажется, что структуры АК – лишь другой способ выражения для логических формул. Однако при усложнении моделей (в частности, при переходе к системам с многими состояниями) с помощью АК оказывается возможным существенно упростить алгоритмы решения ряда задач, рассматриваемых в ЛВМ. Кроме того, в АК при погружении в вероятностное пространство вводится понятие "уравнение регрессии", которое позволяет осуществить постановку и решение задач вероятностной логики по Н. Нильсону. *Если в вероятностных функция типа (4.2) считать p_i не фиксированными числами, а переменными, то такие формулы являются точным уравнением регрессии соответствующей логической формулы.* Доказательство этого утверждения приведено в [5]. Рассмотрим пример системы с многими состояниями.

П р и м е р 2. Пусть

$$R = \begin{bmatrix} \{a_1, a_2\} & \{b_1, b_3\} \\ \{a_3\} & \{b_1, b_2\} \end{bmatrix}$$

– ортогональная C-система с тремя состояниями, задана в пространстве $\{a_1, a_2, a_3\} \times \{b_1, b_2, b_3\}$ с вероятностями $p(a_i)$ и $p(b_i)$, при этом $p(a_3) = 1 - p(a_1) - p(a_2)$ и $p(b_3) = 1 - p(b_1) - p(b_2)$. Тогда вероятность события, выраженного АК-объектом R, при подстановке необходимых вероятностей будет равна

$$p(R) = (p(a_1) + p(a_2))(1 - p(b_2)) +$$
$$+ (1 - p(a_1) - p(a_2))(p(b_1) + p(b_2)).$$

Изложенный подход отражает *прямую задачу* логико-вероятностного анализа, когда при заданных вероятностях элементарных событий выполняется расчет вероятности сложного события. В *обратной задаче* постановка иная – на основе данных о вероятностях некоторых сложных событий нужно рассчитать вероятности элементарных событий, после чего можно получить вероятности других сложных событий. К ним относятся задачи, решаемые в вероятностной логике. Рассмотрим пример, приведенный в статье Н. Нильсона [7].

П р и м е р 3. Дана совокупность событий, заданных формулами A и $A \supset B$ исчисления высказываний, при том $p(A) = p_1$ и $p(A \supset B) = p_2$. Требуется оценить вероятность $p(B)$ события B.

Задачу будем решать методами АК. Имеются всего две логические переменные A и B, которые в данном случае являются также элементарными событиями. Предположим, что вероятность этих событий равна соответственно $p(A)$ и $p(B)$. Из условия задачи следует, что $p(A) = p_1$. Выразим заданные формулы в структурах АК, используя универсум $\{0, 1\}^2$:

$$A = [\{1\} *]; \quad B = [* \{1\}];$$

$$A \supset B = \bar{A} \vee B =]\{0\}\ \{1\}[= \begin{bmatrix} \{0\} & * \\ \{1\} & \{1\} \end{bmatrix}$$

(здесь D-кортеж, соответствующий формуле $A \supset B$, преобразован в ортогональную C-систему).

На основании этого запишем вероятностные формулы для событий A и $A \supset B$

$$P(A) = p_1; \quad P(A \supset B) = (1 - p(A)) + $$
$$+ p(A)p(B) = p_2.$$

Получилась система из двух уравнений:

$$p(A) = p_1;$$
$$(1 - p(A)) + p(A)p(B) = p_2.$$

Откуда несложно вывести

$$p(B) = \frac{p_1 + p_2 - 1}{p_1}.$$

В данной задаче найден точный ответ, в то время как в [7] ответ выглядит как неравенство $p_2 + p_1 - 1 \le p(B) \le p_2$.

В общем случае алгоритм решения задач вероятностной логики следующий. Пусть имеются исходные логические формулы F_i с заданными вероятностями $p(F_i)$ и формула G, вероятность которой $p(G)$ требуется вычислить. Тогда необходимо выполнить следующую последовательность операций:

1) формулы F_i и G преобразуются в ортогональные C-системы;

2) для каждой из этих систем составляется уравнение регрессии $E(F_i)$ и $E(G)$;

3) формируется и решается система уравнений $\{E(F_i)\}$;

4) если система уравнений $\{E(F_i)\}$ имеет единственное решение, то полученные значения переменных подставляются в формулу $E(G)$ и находится точный ответ.

В задаче Нильсона методами АК был получен точный ответ. Но такая ситуация возможна не во всех случаях. Рассмотрим пример.

П р и м е р 4. Даны вероятности событий, описанных логическими формулами:

$$p(A \vee B) = a; \quad p(A \wedge B) = b.$$

Найти оценку $p(A)$ и $p(B)$. Выразим заданные события в системе как ортогональные C-системы:

$$A \vee B \Leftrightarrow]\{1\}\ \{1\}[= \begin{bmatrix} \{1\} & * \\ \{0\} & \{1\} \end{bmatrix};$$

$$A \wedge B \Leftrightarrow [\{1\}\ \{1\}].$$

Сопоставим систему уравнений:

$$p(A) + (1 - p(A))p(B) = a;$$
$$p(A)p(B) = b.$$

Решая данную систему, получим

$$p(A) = \frac{a + b \pm \sqrt{(a+b)^2 - 4b}}{2};$$

$$p(B) = \frac{a + b \mp \sqrt{(a+b)^2 - 4b}}{2}.$$

Видно, что настоящие решения не дают однозначный ответ в тех случаях, когда подкоренное выражение не равно 0 (это возможно при $p(A) \ne p(B)$). Если учитывать, что обе исходные формулы симметричны, то такая неопределенность была предрешена условиями задачи.

Для приведенных примеров можно численно проверить выкладки, если построить соответствующие им вероятностные модели. Так, для примера 4 вероятностная модель будет следующей: пусть одновременно бросаются две монеты, при этом известны вероятности выпадения хотя бы одного герба (этому событию соответствует формула $A \vee B$) и герба в двух бросаниях (формула $A \wedge B$). Зная вероятность выпадения герба (для правильных монет – 0.5), можно по законам теории вероятности подсчитать вероятности этих сложных событий: $p(A \vee B) = 0.75$; $p(A \wedge B) = 0.25$. Подстановка данных значений в приведенные выше формулы для $p(A)$ и $p(B)$ дает правильный ответ. Аналогичную проверку можно произвести и для "неправильных" монет, когда вероятности выпадения герба отличаются от 0.5.

Вероятностные соотношения, получаемые на основе АК, позволяют не только оценивать вероятность сложных событий при заданных функциях распределения событий в каждом атрибуте, но и решать обратную задачу вероятностного анализа – оценивать типы и параметры маргинальных распределений, т.е. распределений в атрибутах и некоторых проекциях.

Таблица 2

a_1	a_2	a_3	a_4	b_1	b_2	b_3
[0, 2.8]	[1.7, 3.4]	[3.4, 5.5]	[4.3, 6.4]	[0, 2.3]	[1.4, 3.2]	[2.3, 5.0]

Таблица 3

r_1	r_2	r_3	r_4	r_5	r_6	r_7
(0, 1.7)	(1.7, 2.8)	(2.8, 3.4)	(3.4, 4.3)	(4.3, 5.5)	(5.5, 6.4)	(6.4, 7)

Таблица 4

q_1	q_2	q_3	q_4
(0, 1.4)	(1.4, 2.3)	(2.3, 3.2)	(3.2, 5)

Сначала рассмотрим следующую постановку задачи: система представлена в структурах АК или в виде системы логических функций, и для каждой переменной известно распределение вероятности. В многомерном пространстве распределение в атрибутах или в некоторых проекциях этого пространства называется *маргинальным распределением*. Необходимо вычислить распределение вероятности самой системы и оценку устойчивости этого распределения. Задачи такого рода часто возникают при оценке надежности и безопасности структурно сложных систем и в логико-вероятностном управлении риском в бизнесе и технике [12]. Логические системы, в которых решаются эти задачи, можно, используя ранее выведенные соотношения, преобразовать в измеримые системы АК.

Пусть каждый атрибут некоторой совокупности АК-объектов представлен конечной системой событий. Возможны два варианта задания системы событий в атрибуте X_i:

1) в виде элементарной системы (т.е. системы попарно несовместимых событий);

2) на непрерывном распределении вероятностей $p(x_i)$ в форме конечного множества пересекающихся в общем случае интервалов (a_i, b_i), где a_i, b_i – значения параметра x_i и $a_i < b_i$.

Для первого варианта достаточно сопоставить каждому событию его вероятность. Второй вариант можно свести к первому с помощью следующей процедуры:

1) произвести *элементаризацию* системы $\{(a_i, b_i)\}$ интервалов параметра x_i (т.е. в каждом атрибуте выполнить разбиение систем событий на множество попарно непересекающихся интервалов – *квантов*);

2) преобразовать исходную систему событий в дискретную, соотнеся с каждым исходным событием некоторое множество квантов, объединение которых равно этому событию;

3) для каждого кванта e_r вычислить значение вероятности p_r, используя в качестве нижних и верхних пределов интегрирования для $p(x_i)$ концевые точки этого кванта, равные значениям параметра x_i.

Если эта процедура выполнена для каждого атрибута АК-объекта, то расчет его вероятности ведется в такой последовательности:

1) осуществляется ортогонализация АК-объекта;

2) АК-объект преобразуется в полином, в котором каждому кванту приписывается соответствующее значение вероятности.

П р и м е р 5. Система задана в пространстве $X \times Y$, где атрибуты представлены в виде интервалов, при этом $X = [0, 7]$ и [0, 5]. Известны также плотности распределения вероятностей $f_1(x, d_1, e_1)$ и $f_2(y, d_2, e_2)$ на атрибутах, где d_1, e_1, d_2, e_2 – параметры распределений. В этой системе определено событие в виде АК-объекта

$$R[XY] = \begin{bmatrix} \{a_1\} & \{b_1\} \\ \{a_2, a_4\} & \{b_2\} \\ \{a_3\} & \{b_3\} \end{bmatrix},$$

где a_i, b_j – интервалы, заданные в табл. 2. Необходимо определить последовательность расчетов для вычисления вероятности события R.

Для решения задачи достаточно использовать только открытые интервалы. В интересах элементаризации системы построим возрастающие ряды границ интервалов в атрибутах: для X: 0; 1.7; 2.8; 3.4; 4.3; 5.5; 6.4; 7; для Y: 0; 1.4; 2.3; 3.2; 5. Тогда сформируем следующие множества элементарных интервалов для атрибутов X (табл. 3) и Y (табл. 4).

После замены интервалов на соответствующие им множества квантов получим

$$a_1 = \{r_1, r_2\}; \quad a_2 = \{r_2, r_3\}; \quad a_3 = \{r_4, r_5\}; \quad a_4 = \{r_5, r_6\};$$

$$b_1 = \{q_1, q_2\}; \quad b_2 = \{q_2, q_3\}; \quad b_3 = \{q_3, q_4\}.$$

После подстановки в исходную C-систему имеем

$$R = \begin{bmatrix} \{r_1, r_2\} & \{q_1, q_2\} \\ \{r_2, r_3, r_5, r_6\} & \{q_2, q_3\} \\ \{r_4, r_5\} & \{q_3, q_4\} \end{bmatrix}.$$

Для каждого кванта r_i или q_j вычислим вероятность. Например,

$$p(r_3) = \int_{2,8}^{3,4} f_1(x, d_1, e_1)dx.$$

Теперь можно приступить к ортогонализации соответствующих сложных событий. Для события R рассчитаем $\bar{R}$ и после преобразования $\bar{R}$ в ортогональную C-систему найдем $p(R) = 1 - p(\bar{R})$. Тогда (промежуточные расчеты не показаны)

$$\bar{R} = \begin{bmatrix} \{r_3, r_4, r_5, r_6, r_7\} & \{q_1\} \\ \{r_4, r_7\} & \{q_2\} \\ \{r_1, r_7\} & \{q_3\} \\ \{r_1, r_2, r_3, r_6, r_7\} & \{q_4\} \end{bmatrix}.$$

Затем, подставляя вероятности квантов и используя теоремы АК, приходим к выражению

$$p(R) = 1 - p(\bar{R}) = 1 - ((p(r_3) + p(r_4) + p(r_5) + \\ + p(r_6) + p(r_7))p(q_1) + (p(r_4) + p(r_7))p(q_2) + \\ + (p(r_1) + p(r_7))p(q_3) + (p(r_1) + p(r_2) + \\ + p(r_3) + p(r_6) + p(r_7))p(q_4)).$$

При решении обратной задачи для систем с многими состояниями точное решение систем уравнений возможно не всегда, так как число переменных в уравнениях регрессии сопоставимо с числом всех квантов и может превышать число уравнений. Так, в примере 5 число квантов в атрибуте X равно 7, следовательно, число неизвестных параметров только для этого атрибута будет на единицу меньше, т.е. 6. Однако задача может быть решена приближенно, если ее представить как задачу аппроксимации. Допустим, атрибут X_i разделен на k_i квантов ($k_i > 2$). Тогда будем считать в качестве неизвестных не величины квантов, а типы и параметры непрерывных распределений вероятности для каждого атрибута. Число параметров распределений обычно не превышает двух – они и будут неизвестными величинами. Для их оценки можно использовать методы оптимизации, в которых управляющими воздействиями будут типы и параметры маргинальных распределений, а целевой функцией – обобщенный параметр, например среднее значение абсолютных отклонений между расчетными и фактическими значениями вероятностей исследуемых сложных событий.

Заключение. Использование АК позволяет решать прямую и обратную задачу вероятностного анализа логических систем в многомерном пространстве, не ограничиваясь каким-либо одним классом распределений. В качестве маргинальных распределений при решении прямой и обратной задачи можно использовать не только нормальное распределение, но и любое другое.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бурбаки Н.* Теория множеств. М.: Мир, 1965.
2. *Кулик Б.А.* Система логического программирования на основе алгебры кортежей // Изв. РАН. Техн. кибернетика. 1993. № 3. С. 226–239.
3. *Кулик Б.А.* Новые классы КНФ с полиномиально распознаваемым свойством выполнимости // АиТ. 1995. № 2. С. 111–124.
4. *Кулик Б.А.* Представление логических систем в вероятностном пространстве на основе алгебры кортежей. 1. Основы алгебры кортежей // АиТ. 1997. № 1. С. 126–136.
5. *Кулик Б.А., Наумов М.В.* Представление логических систем в вероятностном пространстве на основе алгебры кортежей. 2. Измеримые логические системы // АиТ. 1997. № 2. С. 169–179.
6. *Кулик Б.А.* Анализ надежности систем с многими состояниями на основе алгебры кортежей // АиТ. 2003. № 7. С. 13–18.
7. *Nilsson N.J.* Probabilistic Logic // Artificial Intelligence. 1986. № 28. P. 71–87.
8. *Fagin R., Halpern J.Y., Megiddo N.* Logic for Reasoning and Probability // Report RJ 6190(60900). 1988. № 4. P. 1–41.
9. *Fagin R., Halpern J.Y.* Uncertainty, Belief and Probability // Proc. of 11th Internat. Conf. on Artificial Intelligence. Detroit Michigan, USA: Morgan Kaufmann Publ., 1989. P. 1161–1167.
10. *Рябинин И.А.* Надежность и безопасность структурно-сложных системе. С.-Петербург: Политехника, 2000.
11. *Колмогоров А.Н.* Основные понятия теории вероятностей. М.: Наука, 1974.
12. *Соложенцев Е.Д.* Сценарное логико-вероятностное управление риском в бизнесе и технике. С.-Петербург: Издательский дом “Бизнес-пресса”, 2004. 432 с.