Выбор лучшего объекта на основе парных сравнений на подмножествах критериев[1]

Ашихмин И.В., Ройзензон Г.В.

Аннотация

В статье рассматривается задача выбора лучшего из небольшого числа объектов. Предлагаемый подход к решению этой задачи базируется на принципах вербального анализа решений. Представлен общий алгоритм решения и примеры.

Ключевые слова: качественные сравнения, задачи многокритериального выбора, слабоструктурированные проблемы принятия решений

1. Введение

Широко распространенной задачей в повседневной деятельности человека является задача выбора лучшего объекта из их сравнительно небольшого (5-10) набора. Практическими примерами таких задач являются: выбор покупателем товара в магазине, выбор квартиры для съема или покупки, выбор университета для поступления и т.д. При этом люди, как правило, ориентируются на сравнительные характеристики выбираемых объектов по ряду важных для них аспектов (критериев).

Вопрос о том, насколько последовательны и рациональны люди в принятии таких решений, исследовался в большом числе работ [2, 3, 4, 5, 6].

Результаты дескриптивных исследований можно сформулировать следующим образом:

Задачи сравнения многокритериальных объектов сложны для присущей человеку системы переработки информации, причем сложность увеличивается с ростом числа критериев. Решая такие задачи, человек совершает ошибки, а также использует упрощающие стратегии с целью приспособления задач к своим возможностям. В связи с этим, представляется целесообразным помочь человеку в сравнении многокритериальных объектов, разбивая их на "части" и последовательно предлагая для рассмотрения их относительные достоинства и недостатки.

Предлагаемый подход базируется на принципах заложенных в методах вербального анализа решений (ВАР) [1].

[1] *Работа частично поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (гранты № 0015-96053 и № 01-01-06321)*

Вербальный анализ решений ориентирован на так называемые неструктурированные задачи, где качественные и субъективные факторы доминируют.

Методы вербального анализа решений имеют психологическое обоснование. Прежде всего, в них используются те операции получения информации от ЛПР и экспертов, которые, по результатам проведенных психологических экспериментов, считаются надежными. Кроме того, информация, получаемая от ЛПР, проверяется на непротиворечивость, а выявленные противоречия предъявляются лицу, принимающему решения, для анализа и разъяснения. В методах этой группы не используются коэффициенты важности критериев, а лишь вербальные оценки альтернатив по критериям, к которым не применяются никакие количественных преобразования. Оценка и сравнение могут проводиться как для всех гипотетически возможных, так и для конкретных альтернатив.

Таким образом, ВАР можно охарактеризовать следующим образом:

- Психологически корректные способы получения информации от ЛПР и экспертов;
- корректные способы построения решающего правила;
- проверка информации, полученной от ЛПР, на непротиворечивость.

Основная цель настоящей работы заключается в представлении специальной процедуры, основанной на вышеизложенных принципах, для решения задачи выбора наиболее предпочтительного для ЛПР объекта, характеризующегося оценками по многим критериям. Предлагаемая процедура [8] имеет следующие особенности:

1. Все парные сравнения, осуществляемые ЛПР, имеют качественный характер ("лучше", "хуже", "одинаково");
2. Выбор осуществляется в несколько этапов, на каждом из которых ЛПР предлагаются для сравнения пары альтернатив, отличающихся оценками сначала по одному, а затем по двум, по трем и т.д. критериям;
3. Информация, предлагаемая ЛПР на очередном этапе, базируется на результатах сравнений, осуществленных им на предыдущих этапах.

2. Основные обозначения

$A=\{A_i\}$ - множество из N объектов. Предполагается, что N – небольшое число (5-10).

Объекты характеризуются оценками по M критериям $C = \{C^j\}$ $j \in \{1,..,M\}$.

Множество номеров критериев $K=\{1,\ldots,M\}$.

Каждый i-й объект из A может быть представлен M-мерным набором соответствующих ему оценок по критериям из C: $A_i=(a^1{}_i,a^2{}_i,...,a^M{}_i)$, где $a^j{}_i$ – оценка объекта A_i по критерию C^j.

Шкала оценок по критерию C^j: $V^j=\{v^{jk}\}$, $k=1,..,K^j$, где K^j — число оценок на шкале критерия C^j.

3. Подход к решению

3.1. Основная идея: декомпозиция

Решение рассматриваемой задачи выбора наиболее предпочтительного для ЛПР объекта осуществляется на основе парных сравнения.

Как уже упоминалось во введении, чем больше число критериев, по которым оцениваются объекты, тем человеку сложнее их сравнивать.

Поэтому мы предлагаем декомпозировать множество критериев на подмножества меньшей размерности и проводить парные сравнения на таких подмножествах, пытаясь получить на основе таких сравнений отношения на исходных объектах, описываемых всеми критериями. Будем называть набор оценок объекта по подмножеству критериев альтернативой.

3.2. Независимость критериев по предпочтению и транзитивность

Будем считать, что предпочтения ЛПР между альтернативами, отличающимися оценками по группе критериев, не зависят от соответственно равных оценок по остальным критериям.

Кроме того, будем считать, что, если альтернативы a, b и c находятся в следующих отношениях: $a \succ b$ и $b \succ c$, то $a \succ c$, где «$\succ$» означает «лучше» (транзитивность).

Гипотезы о независимости критериев по предпочтению и транзитивности позволяют на основании результатов сравнения одних альтернатив получать отношения между другими альтернативами и, в том числе, в некоторых случаях, между исходными объектами (см. раздел 3.3). Однако, как показывается ниже, эти гипотезы требуют проверки в процессе опроса ЛПР.

3.3. Правило «сложения» отношений

Введем некоторые дополнительные обозначения:

$E, F \subseteq K$ - подмножества множества номеров критериев

$H=E\cap F$ - критерии, общие для E и F.

a^E, b^E – наборы оценок по критериям E.

c^F, d^F – наборы оценок по критериям F.

Пусть $a^E \succ b^E$, $c^F \succ d^F$, при попарно равных оценках по критериям K\E и K\F, соответственно.

Тогда, если $b^H \equiv c^H$, где '≡' – равенство оценок по соответствующим критериям из H, то при условии независимости критериев по предпочтению и транзитивности отношения $a^E \succ b^E$ и $c^F \succ d^F$ можно «сложить», т.е.

$$\mathbf{(a^E \succ b^E)\oplus(c^F \succ d^F)\Rightarrow(a^E c^{F\setminus E} \succ b^{E\setminus F} d^F)}$$

Действительно, $a^E c^{F\setminus E} \succ b^E c^{F\setminus E} = b^{E\setminus F} b^H c^{F\setminus E} \equiv b^{E\setminus F} c^F \succ b^{E\setminus F} d^F$, т.е. $a^E c^{F\setminus E} \succ b^{E\setminus F} d^F$.

Если $H=\varnothing$, то $(a^E \succ b^E)\oplus(c^F \succ d^F)= \succ (a^E c^F \succ b^E d^F)$.

Не всегда верно, что $\mathbf{(a^E \succ b^E)\oplus(c^F \succ d^F) = (c^F \succ d^F)\oplus(a^E \succ b^E)}$.

Заметим, что запись $a^E \succ b^E$ подразумевает попарно равные оценки по критериям K\E. Следовательно, если в результате сложения получаются одинаковые оценки по некоторым критериям, их можно опустить. Это можно сделать, т.к. в соответствии с предположением о независимости критериев по предпочтению можно заменить эти оценки любыми попарно равными.

Т.о., правило выглядит следующим образом:

$$\mathbf{(a^E \succ b^E)\oplus(c^F \succ d^F)\Rightarrow(a^{E\setminus Q} c^{F\setminus E} \succ b^{E\setminus F} d^{F\setminus Q})}, \textbf{ где } \mathbf{Q\subset H} \textbf{ и } \mathbf{a^Q \equiv d^Q}.$$

Q может быть пустым множеством.

Приведенное выше правило может быть использовано для сравнения многокритериальных объектов на основе информации о предпочтениях на альтернативах, т.е. на наборах оценок по меньшему числу критериев (например, оценок на шкалах критериев, на парах, тройках и т.д. критериев).

3.4. Выявление противоречий

Кроме того, правило «сложения» отношений можно использовать для выявления нарушений транзитивности и/или независимости критериев по предпочтениям (противоречия). Целесообразно после каждого ответа ЛПР проверять, не стала ли совокупность отношений, полученных к данному моменту, противоречивой. Заметим, что в случае обнаружения противоречий, ошибочным необязательно является последний ответ, хотя он и участвует в противоречии, так как до него система была проверена на непротиворечивость [11].

Противоречие может быть как следствием ошибки человека, так результатом того, что критерии могут быть для него зависимыми, а его предпочтения не транзитивными. В последнем случае может потребоваться реструктуризация проблемы или, даже, придется признать, что предлагаемый подход неприемлем для данной задачи.

3.5. Транзитивное замыкание

Все трудности, связанные с выводом отношений между объектами и поиском противоречий, легко решаются с помощь построения транзитивного замыкания [10] множества отношений, полученных на основании ответов ЛПР. Во-первых, в транзитивное замыкание попадают непосредственно спрошенные отношения. При этом, если какие-то критерии не входят в описание сравниваемых альтернатив, по ним в правой и левой частях отношения проставляются всевозможные попарно равные оценки. Далее, если на полученном в результате опроса множестве отношений можно, в предположении транзитивности предпочтений ЛПР, получить новое отношение, оно включается в транзитивное замыкание. Кроме того, если это отношение содержит одинаковые оценки в левой и правой части, то они также заменяются всевозможными комбинациями парно равных оценок. Транзитивное замыкание содержит отношения между объектами, описываемыми всеми критериями.

Очевидно, что если в транзитивном замыкании отношений, полученных из ответов ЛПР, кроме последнего, присутствует отношение, обратное тому, которое следует из в последнего ответа ЛПР, совокупность ответов противоречива. Однако операция построения транзитивного замыкания трудоемка, поскольку его размер растет с увеличением числа ответов быстрее, чем факториал. Можно ли сократить число отношений в замыкании так, чтобы в случае необходимости можно было проверить, не создает ли новый ответ ЛПР противоречия? Да, если хранить в нем только результаты применения правила сложения к так называемым пересекающимся отношениям.

3.6. Транзитивное квазизамыкание

Отношения $a^E \succ b^E$ и $c^F \succ d^F$ будем называть пересекающимися, если $E \cap F \neq \varnothing$.

Введем понятие транзитивного квазизамыкания (ТКЗ). ТКЗ строится из ответов ЛПР последовательным применением правила сложения только к пересекающимся отношениям и включает, в том числе, сами ответы. Если в результате сложения получились альтернативы с попарно одинаковыми оценками по одному или более критериям, эти критерии убираются из отношения.

Например, в транзитивное квазизамыкание множества отношений

$v^1{}_1v^2{}_1 \succ v^1{}_2v^2{}_2$, $v^3{}_1v^4{}_1 \succ v^3{}_2v^4{}_2$, $v^2{}_2v^3{}_3 \succ v^2{}_3v^3{}_1$,

войдут, кроме вышеуказанных, отношения:

$v^1{}_1v^2{}_1v^3{}_3 \succ v^1{}_2v^2{}_2v^3{}_1$, $v^2{}_2v^3{}_3v^4{}_1 \succ v^2{}_3v^3{}_1v^4{}_2$.

Как мы видим, отношение $v^1{}_1v^2{}_1v^3{}_1v^4{}_1 \succ v^1{}_2v^2{}_2v^3{}_2v^4{}_2$ не вошло в ТКЗ.

Утверждение 1. Любое отношение из транзитивного замыкания присутствует в транзитивном квазизамыкании или может быть получено сложением двух и более непересекающихся отношений из транзитивного квазизамыкания и добавлением попарно одинаковых оценок в правую и левую часть.

Доказательство.

Рассмотрим произвольную цепочку вывода некоторого отношения.

$$a^E \succ b^E = \underbrace{((\ldots(}_{kl_1} a^{E1}{}_1 > b^{E1}{}_1 \underbrace{)\ldots))}_{kr_1} \oplus \underbrace{((\ldots(}_{kl_2} a^{E2}{}_2 > b^{E2}{}_2 \underbrace{)\ldots))}_{kr_2} \oplus \ldots \oplus \underbrace{((\ldots(}_{kl_n} a^{En}{}_n \succ b^{En}{}_n \underbrace{)\ldots))}_{kr_n}.$$

$n \geq 1$.

$\forall k \in \{1,..,n\}$ $a^{Ek}{}_k \succ b^{Ek}{}_k$ – произвольное отношение из исходного множества.

$\forall k \in \{1,..,n\}$ $\sum_{i=1}^{k} kl_i - \sum_{i=1}^{k-1} kr_i = \sum_{i=k}^{n} kr_i - \sum_{i=k+1}^{n} kl_i$, т.е. для каждой открывающей скобки найдется закрывающая, находящаяся правее.

$\sum_{i=1}^{n} kl_i = \sum_{i=1}^{n} kr_i$, т.е. число открывающих и закрывающих скобок равно.

Все $a_k \succ b_k$, выражения внутри скобок и $a \succ b$ – элементы транзитивного замыкания.

Правила вывода выражений.

1. Сумма НЭТКЗ :- ЭТКЗ.
2. Сумма НЭТКЗ :- Сумма НЭТКЗ $\oplus$ ЭТКЗ | $\forall$x$\in$НЭТКЗ x$\cap$ЭТКЗ=$\varnothing$.
3. Сумма НЭТКЗ1 $\oplus$ ЭТКЗ1 :- Сумма НЭТКЗ2 $\oplus$ ЭТКЗ2 | $\exists$x$\in$НЭТКЗ2 x$\cap$ЭТКЗ2$\neq\varnothing$, НЭТКЗ1= НЭТКЗ2\x, ЭТКЗ1=x $\oplus$ ЭТКЗ2.
4. ЭТКЗ :- исходное отношение.
5. ЭТКЗ :- x $\oplus$ y | x$\in$ТКЗ, y$\in$ТКЗ, x$\cap$y$\neq\varnothing$.
6. ЭТКЗ :- (ЭТКЗ).
7. Сумма НЭТКЗ :- (Сумма НЭТКЗ).

Сумма НЭТКЗ – сумма непересекающихся элементов транзитивного квазизамыкания.

ЭТКЗ – элемент транзитивного квазизамыкания.

x$\in$Сумма НЭТКЗ – x является слагаемым в «Сумма НЭТКЗ».

Неочевидным является преобразование 3. Пусть

Сумма НЭТКЗ1= $(c^{Q1}{}_1 \succ d^{Q1}{}_1) \oplus (c^{Q2}{}_2 \succ d^{Q2}{}_2) \oplus ... \oplus (c^{Qm}{}_m \succ d^{Qm}{}_m)$,

ЭТКЗ1= $(e^Q \succ f^Q)$,

где $\forall i\neq j$ $Qi\cap Qj=\varnothing$

и пусть $Qk\cap Q\neq\varnothing$.

Тогда оценки в левой части отношения ЭТКЗ2 по критериям Q\Qk не отличаются от оценок ЭТКЗ1 по этим критериям. Таким образом, результат сложения не зависит от порядка добавления элементов «Сумма НЭТКЗ1» слева к ЭТКЗ1. После применения правила 3 мы либо получим «Сумму НЭТКЗ», либо выражение, к которому можно снова применить 3. Этот процесс конечен, т.к. в результате каждого применения правила 3 НЭТКЗ1 становится на одно слагаемое меньше.

Приведенные правила вывода выражений позволяют содержимое любой пары соответствующих скобок привести к «Сумме НЭТКЗ». Из этого прямо следует приведенное выше утверждение.

3.7. Разбор противоречий с помощью транзитивного квазизамыкания

Утверждение 2. Если добавление одного ответа ЛПР делает систему противоречивой, то транзитивное замыкание множества ответов содержит отношение, обратное этому ответу.

Прежде, чем переходить к доказательству утверждения рассмотрим следующую лемму.

Лемма 1. Имеются отношения $a^E \succ b^E$, $c^F \succ d^F$, $e^G \succ f^G$, причем

$$(a^E \succ b^E) \oplus (c^F \succ d^F) = (e^G \succ f^G). \quad (1)$$

Тогда

$$(f^G \succ e^G) \oplus (a^E \succ b^E) = (d^F \succ c^F) \quad (2)$$

$$(c^F \succ d^F) \oplus (f^G \succ e^G) = (b^E \succ a^E). \quad (3)$$

Доказательство леммы 1.

Распишем (1).

$(a^E \succ b^E) \oplus (c^F \succ d^F) \Rightarrow (a^{E\setminus Q} c^{F\setminus E} \succ b^{E\setminus F} d^{F\setminus Q})$, где $Q \subset E \cap F$ и $a^Q \equiv d^Q$, $b^{E\cap F} \equiv c^{E\cap F}$.

Таким образом, $e^G = a^{E\setminus Q} c^{F\setminus E}$, $f^G = b^{E\setminus F} d^{F\setminus Q}$, $G = (E\setminus Q) \cup (F\setminus E) = (E\setminus F) \cup (F\setminus Q) = (E \cup F)\setminus Q$.

Обозначим $H = G \cap E$. Заметим, что $H = E\setminus Q$.

$e^{G\cap E} = a^{G\cap E} = a^{E\setminus Q}$

$f^{E\setminus F} = b^{E\setminus F}$

$(f^G \succ e^G) \oplus (a^E \succ b^E) = (f^{G\setminus(E\setminus F)} a^{E\setminus G} \succ e^{G\setminus E} b^{E\setminus(E\setminus F)}) =$

$= (f^{F\setminus Q} a^Q \succ e^{G\setminus E} b^{E\cap F}) = (d^{F\setminus Q} d^Q \succ c^{F\setminus E} c^{E\cap F}) = (d^F \succ c^F)$

Первое равенство расписано в соответствии с правилом сложения отношений, а для остальных использованы следующие преобразования: $G\setminus(E\setminus F) = F\setminus Q$, $E\setminus(E\setminus F) = E \cap F$, $E\setminus G = Q$, $(F\setminus Q) \cap (E\setminus F) = \varnothing$, $e^{G\setminus E} = c^{F\setminus E}$.

Аналогично доказывается (3).

Доказательство утверждения 2.

Система противоречива, если, используя свойства независимости по предпочтениям и транзитивности, можно получить противоположные отношения.

Пусть из ответов ЛПР можно вывести отношения $a^E \succ b^E$ и $b^E \succ a^E$. Допустим, что последний ответ участвует в выводе отношения $a^E \succ b^E$.

$a^E \succ b^E = (c^F \succ d^F) \oplus (e^G \succ f^G)$

Если последний ответ участвовал в выводе отношения $c^F \succ d^F$, то на основании леммы 1 показывается, что в транзитивном замыкании множества ответов без последнего присутствует отношение $d^F \succ c^F$. Аналогично для отношения $e^G \succ f^G$.

Таким образом, последовательно меняя отношения на обратные, мы получим отношение, обратное последнему ответу ЛПР. Что и требовалось доказать.

Рассмотрим теперь процесс разбора противоречия с помощью ЛПР.

Пусть последний ответ ЛПР - $a^E \succ b^E$. Если он вносит в систему противоречие, то в соответствии с утверждением 2, в транзитивном замыкании существующего множества ответов присутствует отношение $b^E \succ a^E$. Согласно утверждению 1, это отношение представляется суммой одного или более непересекающихся отношений из транзитивного квазизамыкания. Т.е.

$$a^E \succ b^E = (a^{E1}{}_1 \succ b^{E1}{}_1) \oplus (a^{E2}{}_2 \succ b^{E2}{}_2) \oplus ... \oplus (a^{En}{}_n \succ b^{En}{}_n).$$

$$\forall i,j \in \{1,...,n\} : i \neq j \ Ei \cap Ej = \varnothing, \ \bigcup_{i=1}^{n} Ei = E .$$

Если все эти отношения – ответы ЛПР, то объяснение полученного вывода выглядит следующим образом:

Вы подтверждаете Ваш ответ $a^{E1}{}_1 \succ b^{E1}{}_1$*?*

Если ЛПР не подтверждает, это значит, что он, отвечая на соответствующий вопрос, допустил ошибку.

Что вы предпочитаете $a^{E1}{}_1 a^{E2}{}_2$ *или* $b^{E1}{}_1 a^{E2}{}_2$*? Обратите внимание, что слева и справа стоят одинаковые оценки по критериям E2.*

Если ЛПР говорит, что это не так, то это означает, что его предпочтения не отвечают условию независимости критериев по предпочтениям.

Вы подтверждаете Ваш ответ $a^{E2}{}_2 \succ b^{E2}{}_2$*?*

Что вы предпочитаете $b^{E1}{}_1 a^{E2}{}_2$ *или* $b^{E1}{}_1 b^{E2}{}_2$*? Обратите внимание, что слева и справа стоят одинаковые оценки по критериям E1.*

Таким образом, для Вас $(a^{E1}{}_1 a^{E2}{}_2 \succ b^{E1}{}_1 a^{E2}{}_2)$ *и* $(b^{E1}{}_1 a^{E2}{}_2 \succ b^{E1}{}_1 b^{E2}{}_2)$*. Подтверждаете ли Вы, что* $(a^{E1}{}_1 a^{E2}{}_2 \succ b^{E1}{}_1 b^{E2}{}_2)$*?*

Если нет, то его предпочтения не отвечают условию транзитивности.

Добавляем отношения до тех пор, пока не получим $a^{E1}{}_1 a^{E2}{}_2 \ldots a^{En}{}_n \succ b^{E1}{}_1 b^{E2}{}_2 \ldots b^{En}{}_n$, что и есть $a^E \succ b^E$.

Если какое-либо отношение $a^{Ei}{}_i \succ b^{Ei}{}_i$ не является ответом ЛПР – оно сумма двух пересекающихся элементов транзитивного квазизамыкания его ответов.

$a^{Ei}{}_i \succ b^{Ei}{}_i = (c^F \succ d^F) \oplus (e^G \succ f^G)$, $d^{F \cap G} = e^{F \cap G}$, $Q \subseteq F \cap G$, $c^Q \equiv f^Q$.

Если $c^F \succ d^F$ и $e^G \succ f^G$ – его ответы то объяснение, откуда появилось $a^{Ei}{}_i \succ b^{Ei}{}_i$ – следующее:

Вы подтверждаете Ваш ответ $c^F \succ d^F$?

Если ЛПР не подтверждает, это значит, что он, отвечая на соответствующий вопрос, допустил ошибку.

Что вы предпочитаете $c^F e^{G \backslash F}$ или $d^F e^{G \backslash F}$? Обратите внимание, что слева и справа стоят одинаковые оценки по критериям $G \backslash F$.

Если ЛПР говорит, что это не так, то это означает, что его предпочтения не отвечают условию независимости критериев по предпочтениям.

Вы подтверждаете Ваш ответ $e^G \succ f^G$?

Что вы предпочитаете $d^{F \backslash G} e^G$ или $d^{F \backslash G} f^G$? Обратите внимание, что слева и справа стоят одинаковые оценки по критериям $F \backslash G$.

Учитывая, что $d^{F \cap G} = e^{F \cap G}$, $d^F e^{G \backslash F} = d^{F \backslash G} e^G$.

Таким образом для Вас ($c^F e^{G \backslash F} \succ d^F e^{G \backslash F}$) и ($d^F e^{G \backslash F} \succ d^{F \backslash G} f^G$). Подтверждаете ли Вы, что ($c^F e^{G \backslash F} \succ d^{F \backslash G} f^G$)?

Если нет, то его предпочтения не отвечают условию транзитивности.

Что вы предпочитаете $c^{F \backslash Q} e^{G \backslash F}$ или $d^{F \backslash G} f^{G \backslash Q}$? Обратите внимание, что альтернативы не содержат оценок по критериям Q.

Если ЛПР говорит, что это не так, то это означает, что его предпочтения не отвечают условию независимости критериев по предпочтениям.

Таким образом, мы получаем отношение $a^{Ei}{}_i \succ b^{Ei}{}_i$.

Если какое-либо из отношений $c^F \succ d^F$, $e^G \succ f^G$ не является ответом ЛПР, то это отношение - сумма двух пересекающихся элементов транзитивного квазизамыкания его ответов. Объяснение того, как было получено это отношение, абсолютно аналогично объяснению, приведенному ранее.

Таким образом, строится дерево вывода отношения $a^E \succ b^E$ и объяснение идет от листьев к корню.

4. Общий алгоритм решения задачи

На первом этапе ЛПР должен упорядочить наборы оценок каждого критерия в соответствии со своими предпочтениями (построение порядковых шкал критериев). При переходе от номинальных шкал к порядковым осуществляется контроль непротиворечивости.

Назовем альтернативу "реальной", если она составляет часть набора оценок объекта из множества А.

Далее формируется перечень всех возможных "реальных" двухкритериальных альтернатив (этап 2):

Для всех $j_1, j_2 \in K, j_2 \succ j_1$

$\pi^{j1,j2} = \{(a^{j1}_i, a^{j2}_i) \mid i = 1,..,N\}$

После того как множества $\pi^{j1,j2}$ сформированы, ЛПР должен, в соответствии со своими предпочтениями упорядочить альтернативы, принадлежащие этим множествам (этап 3):

1) Если $a^{j1}_i \succ a^{j1}_k$ и $a^{j2}_i \succ a^{j2}_k$ (информация, полученная на первом этапе), то $(a^{j1}_i, a^{j2}_i) \succ (a^{j1}_k, a^{j2}_k)$;

2) Если $a^{j1}_i \succ a^{j1}_k$ и $a^{j2}_i \prec a^{j2}_k$, то пара (a^{j1}_i, a^{j2}_i) и (a^{j1}_k, a^{j2}_k) предъявляется ЛПР для сравнения.

При этом ЛПР, имеет возможность дать следующие ответы:

1) $(a^{j1}_i, a^{j2}_i) \succ (a^{j1}_k, a^{j2}_k)$

2) $(a^{j1}_i, a^{j2}_i) \prec (a^{j1}_k, a^{j2}_k)$

3) $(a^{j1}{}_i, a^{j2}{}_i) \approx (a^{j1}{}_k, a^{j2}{}_k)$

4) «Не знаю».

Каждый ответ ЛПР проверяется на непротиворечивость по отношению к предыдущим ответам.

На этапе 4 осуществляется вывод отношений между объектами на основе предпочтений ЛПР, выявленных на этапе 3 (правило «сложения» см. п. 3.3). Если удается выбрать наиболее предпочтительный объект, то окончание процедуры, в противном случае переход к этапу 5.

На следующем этапе (5) осуществляется формирование всех возможных "реальных" трехкритериальных альтернатив:

Для всех $j_1, j_2, j_3 \in \{1,..,M\}, j_3 \succ j_2 \succ j_1$

$\pi^{j1,j2,j3} = \{(a^{j1}{}_i, a^{j2}{}_i, a^{j3}{}_i), i = 1,..,N\}$

На этапе 6 для всех $j_1, j_2, j_3 \in \{1,..,M\}, j_3 \succ j_2 \succ j_1$ осуществляется упорядочение альтернатив из $\pi^{j1,j2,j3}$ в соответствии с предпочтениями ЛПР. Если удается выбрать наиболее предпочтительный объект, то окончание процедуры, в противном случае переход к следующему этапу. При этом формируются четырехкритериальные альтернативы и т.д.

Как упоминалось выше, увеличение числа критериев, участвующих в вопросах ЛПР, приводит к уменьшению надежности получаемой от ЛПР информации. Однако предлагаемые нами способы задания вопросов ЛПР позволяют организовать дополнительные проверки его ответов. Если ЛПР начинает давать противоречивые ответы при разном представлении одних и тех же альтернатив (см. ниже), имеет смысл прекращать опрос при соответствующем числе критериев, даже если некоторые объекты останутся несравнимыми.

5. Примеры

5.1. Особенности выявления предпочтений на подмножестве критериев

Для выбора лучшего объекта необходимо выполнить такое количество сравнений объектов исходного множества, которое позволит выделить его из остальных, с точки зрения предпочтительности для ЛПР. При небольшом числе объектов такие сравнения удобно проводить парно.

Рассмотрим предлагаемую процедуру на примере сравнения двух объектов A_1 и A_2, описываемых оценками по четырем критериям: $A_1 = (a^1{}_1, a^2{}_1, a^3{}_1, a^4{}_1)$, $A_2 = (a^1{}_2, a^2{}_2, a^3{}_2, a^4{}_2)$, где $a^1{}_k, a^2{}_k, a^3{}_k, a^4{}_k$ - оценки объекта A_k, k=1,2, по критериям C^1, C^2, C^3, C^4, соответственно.

5.1.1. Упорядочение оценок по критериям: построение порядковых шкал

ЛПР предлагается упорядочить по предпочтительности оценки по отдельным критериям, т.е. пары $(a^1{}_1, a^1{}_2)$, $(a^2{}_1, a^2{}_2)$, $(a^3{}_1, a^3{}_2)$ и $(a^4{}_1, a^4{}_2)$. Для каждой пары ЛПР может дать один из следующих ответов: первая оценка лучше второй, первая оценка хуже второй либо первая и вторая оценка одинаково предпочтительны.

Таким образом, результатом первого этапа, является переход от номинальных шкал к порядковым.

5.1.2. Сравнение альтернатив, отличающихся оценками по двум критериям

На основе информации, полученной на этапе, описанном в параграфе 5.1.1., сравним объекты A_1 и A_2. Известно (правило Парето), при условии независимости критериев по предпочтению, что если все оценки одного объекта (например, для определенности, A_1) не хуже (лучше или одинаково предпочтительны) соответствующих оценок другого объекта (A_2), то объект A_1 не хуже объекта A_2.

Однако, если только часть оценок объекта A_1 не хуже соответствующих оценок объекта A_2 (причем, хотя бы одна лучше), а остальные хуже, информации, полученной на предыдущем этапе, недостаточно для сравнения этих объектов.

Рассмотрим, для простоты, случай строгого предпочтения одних оценок перед другими. Для случая одинаковой предпочтительности каких-то оценок, все рассуждения останутся справедливыми, с соответствующими необходимыми изменениями.

Поскольку объекты описываются оценками по четырем критериям, здесь возможны следующие ситуации:

a) у объекта A_1 оценка по одному критерию лучше соответствующей оценки объекта A_2, а оценки по остальным трем критериям, соответственно, хуже
b) у объекта A_1 оценка по двум критериям лучше соответствующих оценок объекта A_2, а оценки по остальным двум критериям, соответственно, хуже

c) у объекта A_1 оценка по трем критериям лучше соответствующих оценок объекта A_2, а оценка по одному критерию хуже.

Последняя ситуация, очевидно, аналогична ситуации a), если мы поменяем объекты A_1 и A_2 местами. Поэтому будем рассматривать только ситуации a) и b). Кроме того, примем, для определенности, что в ситуации a) $a^1{}_1 \prec a^1{}_2$, $a^2{}_1 \succ a^2{}_2$, $a^3{}_1 \succ a^3{}_2$, $a^4{}_1 \succ a^4{}_2$, а в ситуации b) $a^1{}_1 \prec a^1{}_2$, $a^2{}_1 \prec a^2{}_2$, $a^3{}_1 \succ a^3{}_2$, $a^4{}_1 \succ a^4{}_2$. Здесь значок «$\prec$» означает «хуже», а значок «$\succ$» - лучше. Для обозначения эквивалентности будем использовать значок «$\approx$».

Известно [2], что сравнение альтернатив, отличающихся оценками по двум критериям, представляет собой психологически корректную операцию. Поэтому, попытаемся сравнить объекты A_1 и A_2, последовательно разбивая их на соответствующие, дополняющие друг друга двухкритериальные альтернативы, т.е.:

	Разбиение 1	Разбиение 2	Разбиение 3
$A_1=(a^1{}_1, a^2{}_1, a^3{}_1, a^4{}_1)$ =	$[(a^1{}_1, a^2{}_1), (a^3{}_1, a^4{}_1)]$	$[(a^1{}_1, a^3{}_1), (a^2{}_1, a^4{}_1)]$	$[(a^1{}_1, a^4{}_1), (a^2{}_1, a^3{}_1)]$
$A_2=(a^1{}_2, a^2{}_2, a^3{}_2, a^4{}_2)$ =	$[(a^1{}_2, a^2{}_2), (a^3{}_2, a^4{}_2)]$	$[(a^1{}_2, a^3{}_2), (a^2{}_2, a^4{}_2)]$	$[(a^1{}_2, a^4{}_2), (a^2{}_2, a^3{}_2)]$

Ситуация a)

Рассмотрим первое разбиение:

$A_1 = [(a^1{}_1, a^2{}_1), (a^3{}_1, a^4{}_1)]$

$A_2 = [(a^1{}_2, a^2{}_2), (a^3{}_2, a^4{}_2)]$

Поскольку $a^3{}_1 \succ a^3{}_2$, $a^4{}_1 \succ a^4{}_2$, то, в предположении независимости критериев C^3 и C^4 по предпочтению, $(a^3{}_1,a^4{}_1) \succ (a^3{}_2,a^4{}_2)$. Однако, так как $a^1{}_1 \prec a^1{}_2$, $a^2{}_1 \succ a^2{}_2$, мы не можем формально сравнить $(a^1{}_1,a^2{}_1)$ и $(a^1{}_2,a^2{}_2)$ и для этого нам следует обратиться к ЛПР. При этом мы можем облегчить для ЛПР задачу сравнения, если при предъявлении ему пар $(a^1{}_1,a^2{}_1)$, $(a^1{}_2,a^2{}_2)$ будем «напоминать», какие оценки в сравниваемых двухкритериальных альтернативах лучше, а какие хуже.

Если ЛПР ответит, что $(a^1{}_1,a^2{}_1) \succ (a^1{}_2,a^2{}_2)$, то, поскольку $(a^3{}_1,a^4{}_1) \succ (a^3{}_2,a^4{}_2)$, из независимости критериев по предпочтению следует, что $A_1 \succ A_2$. Действительно:

$(a^1{}_1,a^2{}_1) \succ (a^1{}_2,a^2{}_2)$ означает, что $a^1{}_1a^2{}_1a^3{}_1a^4{}_1 \succ a^1{}_2a^2{}_2a^3{}_1a^4{}_1$; $(a^3{}_1,a^4{}_1) \succ (a^3{}_2,a^4{}_2)$ означает, что $a^1{}_2a^2{}_2a^3{}_1a^4{}_1 \succ a^1{}_2a^2{}_2a^3{}_2a^4{}_2$; отсюда, $a^1{}_1a^2{}_1a^3{}_1a^4{}_1 \succ a^1{}_2a^2{}_2a^3{}_2a^4{}_2$, т.е. $A_1 \succ A_2$.

Аналогично показывается, что, если по мнению ЛПР $(a^1{}_1,a^2{}_1) \approx (a^1{}_2,a^2{}_2)$ (где значок «≈» означает «одинаково предпочтительны»), то, поскольку $(a^3{}_1,a^4{}_1) \succ (a^3{}_2,a^4{}_2)$, из независимости критериев по предпочтению следует, что $A_1 \succ A_2$.

Однако, если ЛПР ответит, что $(a^1{}_1,a^2{}_1) \prec (a^1{}_2,a^2{}_2)$, объекты A_1 и A_2 сравнить пока не удается.

В таком случае, перейдем к следующему варианту разбиения, т.е.

$A_1 = [(a^1{}_1, a^3{}_1), (a^2{}_1, a^4{}_1)]$

$A_2 = [(a^1{}_2, a^3{}_2), (a^2{}_2, a^4{}_2)]$

Если ЛПР ответит, что $(a^1{}_1,a^3{}_1) \succ (a^1{}_2,a^3{}_2)$, то, поскольку $(a^2{}_1,a^4{}_1) \succ (a^2{}_2,a^4{}_2)$, $A_1 \succ A_2$.

Если ЛПР ответит, что $(a^1{}_1,a^3{}_1) \approx (a^1{}_2,a^3{}_2)$, то $A_1 \succ A_2$.

Однако, если ЛПР ответит, что $(a^1{}_1,a^3{}_1) \prec (a^1{}_2,a^3{}_2)$, объекты A_1 и A_2 сравнить не удастся и мы должны перейти к последнему варианту разбиения, т.е.

$A_1 = [(a^1{}_1, a^4{}_1), (a^2{}_1, a^3{}_1)]$

$A_2 = [(a^1{}_2, a^4{}_2), (a^2{}_2, a^3{}_2)]$

Если ЛПР ответит, что $(a^1{}_1,a^4{}_1) \succ (a^1{}_2,a^4{}_2)$, то, поскольку $(a^3{}_1,a^4{}_1) \succ (a^3{}_2,a^4{}_2)$, $A_1 \succ A_2$.

Если ЛПР ответит, что $(a^1{}_1,a^4{}_1) \approx (a^1{}_2,a^4{}_2)$, то $A_1 \succ A_2$.

Однако, если ЛПР ответит, что $(a^1{}_1,a^4{}_1) \prec (a^1{}_2,a^4{}_2)$, объекты A_1 и A_2 сравнить не удастся.

Таким образом, объекты A_1 и A_2 пока останутся несравненными, если, по мнению ЛПР, $(a^1{}_1,a^2{}_1) \prec (a^1{}_2,a^2{}_2)$, $(a^1{}_1,a^3{}_1) \prec (a^1{}_2,a^3{}_2)$ и $(a^1{}_1,a^4{}_1) \prec (a^1{}_2,a^4{}_2)$.

<u>Ситуация b)</u>

В ситуации b) первый вариант разбиения не позволяет сравнить объекты A_1 и A_2, поскольку

$(a^1{}_1,a^2{}_1) \prec (a^1{}_2,a^2{}_2)$, но $(a^3{}_1,a^4{}_1) \succ (a^3{}_2,a^4{}_2)$

Однако со вторым и третьим вариантами разбиения мы можем поступать так же, как и в ситуации а), за тем исключением, что в каждом таком варианте мы будем предъявлять ЛПР для сравнения обе составляющие такой вариант пары.

Так, во втором варианте мы попросим ЛПР сравнить сначала $(a^1{}_1,a^3{}_1)$ и $(a^1{}_2,a^3{}_2)$, а затем $(a^2{}_1,a^4{}_1)$ и $(a^2{}_2,a^4{}_2)$. Здесь возможны следующие случаи:

i. $(a^1{}_1,a^3{}_1) \succ (a^1{}_2,a^3{}_2)$, $(a^2{}_1,a^4{}_1) \succ (a^2{}_2,a^4{}_2)$. Тогда, из независимости критериев по предпочтению, следует, что $A_1 \succ A_2$

ii. $(a^1{}_1,a^3{}_1) \approx (a^1{}_2,a^3{}_2)$, $(a^2{}_1,a^4{}_1) \succ (a^2{}_2,a^4{}_2)$. Тогда, из независимости критериев по предпочтению, следует, что $A_1 \succ A_2$

iii. $(a^1{}_1,a^3{}_1) \prec (a^1{}_2,a^3{}_2)$, $(a^2{}_1,a^4{}_1) \prec (a^2{}_2,a^4{}_2)$. Тогда, из независимости критериев по предпочтению, следует, что $A_1 \prec A_2$

iv. $(a^1{}_1,a^3{}_1) \approx (a^1{}_2,a^3{}_2)$, $(a^2{}_1,a^4{}_1) \prec (a^2{}_2,a^4{}_2)$. Тогда, из независимости критериев по предпочтению, следует, что $A_1 \prec A_2$

v. $(a^1{}_1,a^3{}_1) \succ (a^1{}_2,a^3{}_2)$, $(a^2{}_1,a^4{}_1) \prec (a^2{}_2,a^4{}_2)$. В этом случае объекты A_1 и A_2 сравнить не удастся.

vi. $(a^1{}_1,a^3{}_1) \prec (a^1{}_2,a^3{}_2)$, $(a^2{}_1,a^4{}_1) \succ (a^2{}_2,a^4{}_2)$. В этом случае имеющейся пока информации для сравнения объектов A_1 и A_2 недостаточно.

Если ответ ЛПР будет соответствовать случаю v или vi, переходим к третьему варианту разбиения, т.е. к сравнению $(a^1{}_1,a^4{}_1)$ и $(a^1{}_2,a^4{}_2)$, а затем $(a^2{}_1,a^3{}_1)$ и $(a^2{}_2,a^3{}_2)$, ответы ЛПР для которого анализируются аналогичным образом.

Если же и этот вариант не позволит сравнить объекты A_1 и A_2, нам потребуется дополнительная информация от ЛПР (см. следующий параграф).

5.1.3. Сравнение альтернатив, отличающихся оценками по трем критериям

На предыдущих этапах мы использовали информацию, получение которой от ЛПР, как уже упоминалось выше, считается психологически корректным. Сравнение же альтернатив, отличающихся оценками по трем критериям, является более сложной для человека операцией [2]. Однако ее можно свести к операции, близкой к психологически корректной, т.е. к сравнению альтернатив, описываемых оценками по двум критериям, один из которых является исходным критерием, а второй «составляется» из двух других исходных критериев.

Из оценок объектов A_1 и A_2 могут быть сформированы следующие трехкритериальные альтернативы («тройки»):

A_1: $(a^1{}_1, a^2{}_1, a^3{}_1)$; $(a^1{}_1, a^2{}_1, a^4{}_1)$; $(a^1{}_1, a^3{}_1, a^4{}_1)$; $(a^2{}_1, a^3{}_1, a^4{}_1)$

A_2: $(a^1{}_2, a^2{}_2, a^3{}_2)$; $(a^1{}_2, a^2{}_2, a^4{}_2)$; $(a^1{}_2, a^3{}_2, a^4{}_2)$; $(a^2{}_2, a^3{}_2, a^4{}_2)$

Рассмотрим первую пару «троек»: $(a^1{}_1, a^2{}_1, a^3{}_1)$ и $(a^1{}_2, a^2{}_2, a^3{}_2)$. Ее можно представить в виде трех следующих вариантов:

$(a^1{}_1, a^2{}_1, a^3{}_1) = [(a^1{}_1, a^2{}_1), a^3{}_1] = [(a^1{}_1, a^3{}_1), a^2{}_1] = [a^1{}_1, (a^2{}_1, a^3{}_1)]$

$(a^1{}_2, a^2{}_2, a^3{}_2) = [(a^1{}_2, a^2{}_2), a^3{}_2] = [(a^1{}_2, a^3{}_2), a^2{}_2] = [a^1{}_2, (a^2{}_2, a^3{}_2)]$

Первый вариант можно рассматривать как альтернативы, описываемые оценками по составному критерию $C^1{\times}C^2$ и исходному критерию C^3, соответственно. Причем, из предыдущих этапов уже известно, в каком отношении находятся двухкритериальные альтернативы $(a^1{}_1, a^2{}_1)$ и $(a^1{}_2, a^2{}_2)$, являющиеся оценками по составному критерию $C^1{\times}C^2$. Таким образом, мы можем предъявить ЛПР для сравнения двухкритериальные альтернативы $(a^1{}_1, a^2{}_1)$, $a^3{}_1$ и $(a^1{}_2, a^2{}_2)$, $a^3{}_2$ аналогично тому, как это делалось на предыдущем этапе.

Тем не менее, поскольку операция такого сравнения является несколько более сложной для ЛПР, полученный от ЛПР ответ нуждается в дополнительной проверке. Для этого у нас есть второй и третий варианты разбиения "троек" $(a^1{}_1, a^2{}_1, a^3{}_1)$ и $(a^1{}_2, a^2{}_2, a^3{}_2)$. Если результаты сравнения каких-то вариантов не совпадут, они могут быть предъявлены ЛПР для анализа и исправления.

Как уже отмечалось выше, по числу несовпадений результатов сравнения одних и тех "троек" при их различном представлении мы будем судить о трудности таких операций для ЛПР и, соответственно, их психологической корректности.

Если, по мнению ЛПР, $(a^1{}_1, a^2{}_1, a^3{}_1) \succ (a^1{}_2, a^2{}_2, a^3{}_2)$, то, поскольку $a^4{}_1 \succ a^4{}_2$, из независимости критериев по предпочтению следует, что $A_1 \succ A_2$.

Если же $(a^1{}_1, a^2{}_1, a^3{}_1) \prec (a^1{}_2, a^2{}_2, a^3{}_2)$, мы не можем сравнить объекты A_1 и A_2 и должны перейти к рассмотрению второй пары «троек», т.е. $(a^1{}_1, a^2{}_1, a^4{}_1)$ и $(a^1{}_2, a^2{}_2, a^4{}_2)$, сравнение которых будет производиться аналогичным образом. И так далее, пока, либо объекты A_1 и A_2 не будут сравнены, либо не будут исчерпаны все варианты сравнения «троек». В последнем случае, т.е. если объекты A_1 и A_2 не удастся сравнить на основе «троек», переходим к следующему этапу.

5.2. Сравнение альтернатив, отличающихся оценками по четырем критериям

На этом этапе нам придется прибегнуть к выполнению ЛПР еще более сложной операции сравнения, а именно, сравнение четырехкритериальных альтернатив. Однако, как и на предыдущем этапе, мы можем представить такие альтернативы в виде двухкритериальных: один из критериев будет критерием из исходного набора, а второй «составляется» из трех других исходных критериев ($C^1 \times C^2 \times C^3$, $C^1 \times C^2 \times C^4$, $C^1 \times C^3 \times C^4$ и $C^2 \times C^3 \times C^4$). Причем, к этому моменту отношение между оценками по каждому из таких «составных» критериев будет известно. Кроме того, поскольку каждая из четырехкритериальных альтернатив может быть представлена в виде «двухкритериальной» четырьмя разными способами, у нас имеется возможность для проверки ответов ЛПР, а также для объяснения и исправления его возможных ошибок.

Таким образом, два многокритериальных объекта могут быть сравнены посредством последовательного разбиения их оценок на две группы, одна из которых включает оценки по одному исходному критерию, а другая состоит из соответствующего сочетания оценок по двум, трем и т.д. остальным критериям. Заметим, что при таком подходе, из предыдущих этапов всегда известно, в каком отношении находятся оценки по такому «составному» критерию, и сообщать эту информацию ЛПР при выполнении им соответствующей операции сравнения. Кроме того, поскольку вышеупомянутое разбиение может быть, в каждом случае, выполнено несколькими различными способами, у нас всегда будет иметься дополнительная информация для проверки ответов ЛПР и объяснения ему его возможных ошибок с целью их последующего исправления.

5.3. Пример противоречивой ситуации

Известно много примеров нетранзитивного поведения человека при сравнении многокритериальных объектов [7, 9].

Ниже приводится небольшой пример, как подобное поведение человека может быть представлено, с точки зрения, применяемого нами подхода (отсутствие явных противоречий (циклов) в ответах ЛПР, но наличие цикла на объектах).

Три объекта:

$A_1 = (a^1{}_1, a^2{}_1, a^3{}_1, a^4{}_1)$

$A_2 = (a^1{}_2, a^2{}_2, a^3{}_2, a^4{}_2)$

$A_3 = (a^1{}_3, a^2{}_3, a^3{}_3, a^4{}_3)$

Опрос ЛПР:

Шкала критерия C^1: $a^1{}_3 \succ a^1{}_1 \succ a^1{}_2$

Шкала критерия C^2: $a^2{}_2 \succ a^2{}_1 \succ a^2{}_3$

Шкала критерия C^3: $a^3{}_2 \succ a^3{}_3 \succ a^3{}_1$

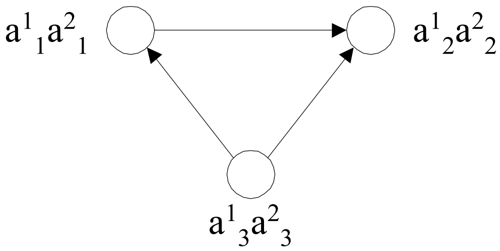
Шкала критерия C^4: $a^4{}_1 \succ a^4{}_3 \succ a^4{}_2$

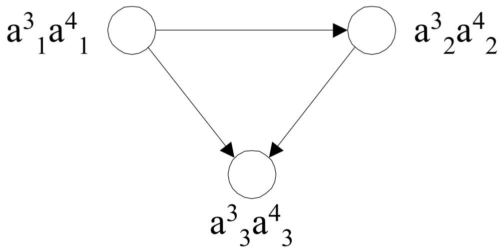
1. Сравнение оценок (C^1 и C^2) и (C^3 и C^4)

$a^1{}_1a^2{}_1 \succ a^1{}_2a^2{}_2$
$a^3{}_1a^4{}_1 \succ a^3{}_2a^4{}_2$ $\Rightarrow A_1 \succ A_2$

$a^1{}_1a^2{}_1 \prec a^1{}_3a^2{}_3$
$a^3{}_1a^4{}_1 \succ a^3{}_3a^4{}_3$

$a^1{}_2a^2{}_2 \prec a^1{}_3a^2{}_3$
$a^3{}_2a^4{}_2 \succ a^3{}_3a^4{}_3$



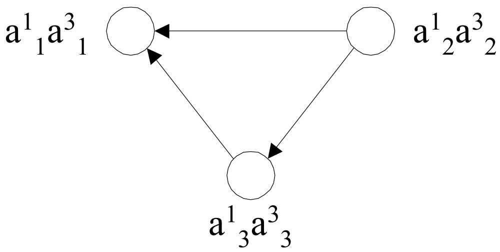


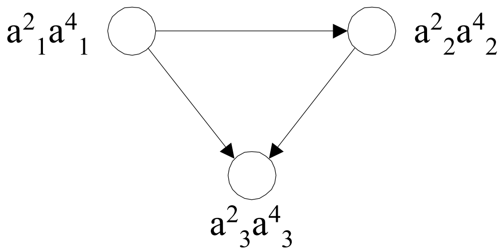
2. Сравнение оценок (C^1 и C^3) и (C^2 и C^4)

$a^1{}_2a^3{}_2 \succ a^1{}_3a^3{}_3$
$a^2{}_2a^4{}_2 \succ a^2{}_3a^4{}_3$ $\Rightarrow A_2 \succ A_3$

$a^1{}_1a^3{}_1 \prec a^1{}_2a^3{}_2$
$a^2{}_1a^4{}_1 \succ a^2{}_2a^4{}_2$

$a^1{}_1a^3{}_1 \prec a^1{}_3a^3{}_3$
$a^2{}_1a^4{}_1 \succ a^2{}_3a^4{}_3$



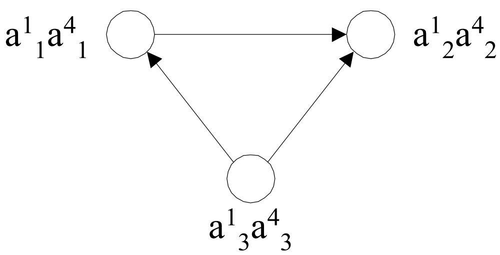


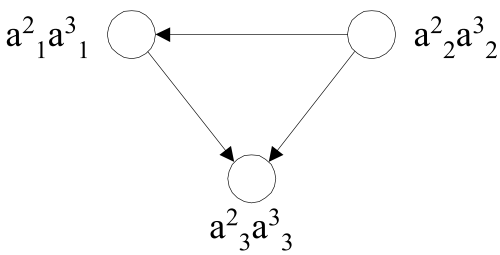
3. Сравнение оценок (C^1 и C^4) и (C^2 и C^3)

$a^1{}_1a^4{}_1 \prec a^1{}_3a^4{}_3$
$a^2{}_1a^3{}_1 \prec a^2{}_3a^3{}_3$ $\Rightarrow A_1 \prec A_3$

$a^1{}_1a^4{}_1 \succ a^1{}_2a^4{}_2$
$a^2{}_1a^3{}_1 \prec a^2{}_2a^3{}_2$

$a^1{}_2a^4{}_2 \prec a^1{}_3a^4{}_3$
$a^2{}_2a^3{}_2 \succ a^2{}_3a^3{}_3$





Таким образом, $A_1 \succ A_2 \succ A_3 \succ A_1$.

Система ответов ЛПР непротиворечива до получения ответа $a^2{}_1a^3{}_1 \prec a^2{}_3a^3{}_3$. Можно показать, что из предыдущих ответов выводится $a^2{}_1a^3{}_1 \succ a^2{}_3a^3{}_3$.

6. Заключение

Процедура позволяет корректно строить диалог с ЛПР, задавая простые вопросы, при этом осуществляется проверка на непротиворечивость.

Предполагается применять вышеизложенный подход для задач следующей размерности: число объектов — не более 10, число критериев не более 10. При увеличении этих параметров ЛПР будет сложнее справиться с поставленной задачей, так ему придется ответить на большое число вопросов.

В рамках вербального подхода к решению задачи есть зависимость между сравнимостью объектов и сложностью задаваемых вопросов. Чем сложнее задаются вопросы, тем реже не удается на основании ответов не получить упорядочение объектов.

Использование рациональной логики для вывода отношений между объектами позволяет нам доступно объяснять полученные выводы и эффективно разбирать противоречия удобным для человека способом.

Требует дополнительной оценки время работы ЛПР, для различных типов задач, определяемых числом объектов и критериев.

7. Литература

[1] Ларичев О.И., Мошкович Е.М. Качественные методы принятия решения. - М.; Физматгиз, 1996.

[2] Russo, J. E., L. D. Rosen: An eye fixation analysis of multiattribute choice, Memory and Cognition., 3 (1975) 267-276.

[3] Montgomery, H., O. Svenson: «A think-aloud study of dominance structuring in decision processes», In: H. Montgomery, O. Svenson (eds.), *Process and Structure on Human Decision Making*, J. Wiley and Sons, Chichester 1989, pp. 135-150.

[4] Payne, J. W., J. R. Bettman, E. Coupey, E. J. Johnson: «A constructive process view of decision making: multiple strategies in judgment and choice», In: O. Huber, J. Mumpower, J van der Pligt, P. Koele (*Eds.*), *Current Themes in Psycological Decision Research,* North Holland, Amsterdam 1993, pp. 107-142.

[5] Larichev, O. I.: Cognitive validity in design of decision-aiding techniques*,* Journal of Multi-criteria Decision Analysis, 1, 3(1992)127-138.

[6] Korhonen, P., O. Larichev, H. Moshkovich, A. Mechitov, J. Wallenius: Choice behavior in a computer-aided multiattribute decision task, Journal of Multi-criteria Decision Analysis, 6 (1997) 233-246.

[7] Льюис Р. Д., Райфа Г. Игры и решения. М.: ИЛ, 1961.

[8] Furems E., Larichev O., Lotov A., Miettinen K., Roizenson G.: Human choice with individually difficult tasks, Труды 3-й Московской международной конференции по исследованию операций (ORM2001), Москва, 4-6 апреля 2001 года.

[9] Ларичев О.И.: Теории и методы принятия решений, а также хроника событий в волшебных странах. Москва, Логос, 2000, стр. 182-183.

[10] Ахо А., Хопкрофт Дж., Ульман Д.: Структуры данных и алгоритмы. Издательский дом «Вильямс», Москва, 2000, стр. 194-195.

[11] Гнеденко Л.С., Фуремс Е.М.: Эффективная процедура выявления нарушений транзитивности при попарных сравнениях. Сборник трудов ВНИИСИ т. 10, Москва, 1990, стр. 46-58.