

## ПРОТИВОРЕЧИВЫЕ СВОЙСТВА МЕТОДОВ ИНДИВИДУАЛЬНОГО ВЫБОРА

© 2001 г. Академик О. И. Ларичев

Поступило 30.01.2001 г.

### 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Одной из наиболее распространенных задач принятия решений является задача упорядочения по качеству альтернатив, имеющих оценки по многим критериям. Существует множество методов, предписывающих лицу, принимающему решения (ЛПР), правила действий, этапы решения задачи ранжирования.

Один из постулатов экономической теории состоит в том, что человек делает рациональный выбор на основе максимизации функции полезности. Полезностью называют воображаемую меру потребительской ценности различных благ. С содержательной точки зрения делается предположение, что ЛПР как бы взвешивает на "внутренних весах" различные альтернативы и упорядочивает их по полезности. Можно представить задачу ранжирования в следующем виде.

Дано:  $i = 1, 2, \dots, N$  – число критериев, описывающих рассматриваемые объекты;  $j = 1, 2, \dots, n$  – число альтернатив ( $A_j$ ), имеющих оценки по многим критериям; предполагается, что эти оценки получены либо от экспертов (в частном случае от ЛПР), либо на основе объективных расчетов;  $w_i = 1, 2, \dots, s_i$  – число оценок на шкале  $i$ -го критерия, упорядоченных от первой (лучшей) к  $s_i$  – худшей. Заметим, что при непрерывных шкалах  $s_i = \infty$ .

Часто используется понятие важности критериев. При этом вводятся  $k_i$  – коэффициенты относительной важности критериев.

Сформулируем наше предположение об отношении ЛПР к альтернативам: ЛПР безразличен к результату выбора. Иначе говоря, альтернативы имеют для ЛПР разную полезность (в частном случае полезность для некоторых альтернатив может быть одинаковой).

Требуется выявить предпочтения ЛПР и решить задачу ранжирования альтернатив.

### 2. ТРЕБОВАНИЯ К МЕТОДАМ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ РАНЖИРОВАНИЯ АЛЬТЕРНАТИВ

Несмотря на большое число методов, существенные различия между ними, можно сформулировать три основных методологических требования к результатам применения методов.

1) Полнота отношений между многокритериальными альтернативами. После того как ЛПР потратил время и усилия на формулирование своих предпочтений, логично ожидать, что он может сделать выбор наилучшей альтернативы или упорядочить альтернативы по качеству. Для этого в общем случае необходимо быть уверенным, что любые две альтернативы сравнимы.

2) Транзитивность на множестве альтернатив. Условие транзитивности является широко распространенным условием рациональности выбора как для математиков, так и для психологов [1].

3) Малая чувствительность к человеческим ошибкам. Каждый метод принятия решений основан на выявлении предпочтений ЛПР для оценки и сравнения альтернатив. ЛПР не является идеальным измерительным прибором (оракулом), он может делать ошибки [2]. Вот почему метод принятия решений должен быть малочувствительным к возможным человеческим ошибкам.

### 3. КЛАССИФИКАЦИЯ НОРМАТИВНЫХ МЕТОДОВ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ

Характерной особенностью различных методов принятия решений является способ получения информации от ЛПР. Поэтому мы будем использовать классификацию нормативных методов по типам информации, получаемой от ЛПР и ее использованию при оценке альтернатив.

1. Методы, основанные на количественных измерениях. К этой группе относятся широко известные методы, основанные на многокритериальной теории полезности [3], а также многие эвристические методы.

2. Методы, основанные на первичных качественных измерениях, результаты которых сразу же переводятся в количественный вид. К этой группе относятся методы аналитической иерархии [4], а также методы, использующие размытые измерения [5].

3. Методы, основанные на количественных измерениях, но использующие несколько индикаторов при сравнении альтернатив. К этой группе относятся методы сравнительного превосходства [6].

4. Методы, основанные на качественных измерениях без какого-либо перехода к количественным переменным. К этой группе относятся методы вербального анализа решений [7].

Далее мы рассмотрим соответствие методов всех четырех групп требованиям к результатам их применения.

#### 4. МЕТОДЫ, ОСНОВАННЫЕ НА КОЛИЧЕСТВЕННЫХ ИЗМЕРЕНИЯХ

Нетрудно убедиться, что эти методы обеспечивают полноту сравнений. Действительно, каждая из альтернатив получает в результате применения метода количественное значение полезности (или ценности). Полученные числа всегда можно сравнить. Набор численных индексов полезности (ценности) альтернатив позволяет установить транзитивные отношения между альтернативами.

В данных методах делается неявное допущение, что измерение человеком какого-либо количественного параметра происходит однократно и что полученное значение является единственным представляющим предпочтения ЛПР. Однако исследования психологов [2], а также практический опыт применения данных методов позволяют усомниться в правильности этого допущения.

**4.1. Особенности человеческих количественных измерений.** Как известно, ЛПР не является точным измерительным прибором, производящим количественные измерения без какой-либо погрешности. Это относится как к измерениям параметров, так и к измерениям полезности альтернативы. Психофизика дает количественные подтверждения неточности человека в измерении физических параметров (вес, длина и т.д.). Имеются данные, свидетельствующие о существенных ошибках людей при назначении вероятностей [2], определении количественных весов критериев [8] и т.д.

Пусть при выполнении любой операции получения информации от ЛПР мы найдем такое отклонение от полученного значения, которое также приемлемо для ЛПР. Очевидно, что при неточных измерениях человек дает одно из возможных значений в каком-то интервале. Человек может признать равно соответствующим своей оценке не-

сколько близких значений вместо одного. Заметим, что такое поведение хорошо соответствует результатам психологических исследований. В случае измерений количественного параметра отклонение дает близкое к первоначальному значение.

В итоге мы находим области безразличия – интервалы значений количественных параметров, в которых предпочтения ЛПР не меняются. Любые значения параметров из областей безразличия могут быть использованы при ранжировании альтернатив. Область безразличия ЛПР представляет его нечувствительность к определенным количественным изменениям параметра.

Сформулируем следующее

**Утверждение 1.** *Наличие интервала безразличия хотя бы для одного количественного параметра позволяет найти подмножество альтернатив на множестве альтернатив  $A$ , которые находятся в отношении нетранзитивности.*

**4.2. Случай аддитивности.** Рассмотрим широко распространенный случай аддитивности. Рассмотрим альтернативу –  $A$  или  $B$ . Обозначим их оценки по критериям как  $a_i$  и  $b_i$ . Полезность (ценность) альтернатив определяется формулой

$$U(A) = \sum_{i=1}^N k_i a_i, \quad U(B) = \sum_{i=1}^N k_i b_i. \quad (1)$$

Предположим, что как веса критериев, так и оценки альтернатив измерены неточно.

$$k'_i = k_i \pm \varepsilon, \quad a'_i = a_i \pm \varepsilon, \quad b'_i = b_i \pm \varepsilon. \quad (2)$$

Для определения превосходства одной из альтернатив определим разность их полезностей с учетом неточности измерений:

$$\begin{aligned} U'(A) - U'(B) &= \sum_{i=1}^N k'_i a'_i - \sum_{i=1}^N k'_i b'_i = \\ &= U(A) - U(B) + \varepsilon \left( \sum_{i=1}^N a'_i - \sum_{i=1}^N b'_i \right). \end{aligned} \quad (3)$$

Пусть  $U(A) > U(B)$ . Тогда результат сравнения альтернатив при учете неточности измерений будет тем же при

$$U(A) - U(B) > \varepsilon \left( \sum_{i=1}^N b'_i - \sum_{i=1}^N a'_i \right). \quad (4)$$

Изменение отношений предпочтения между альтернативами будет при выполнении условия

$$\varepsilon \left( \sum_{i=1}^N b'_i - \sum_{i=1}^N a'_i \right) > U(A) - U(B). \quad (5)$$

Нетрудно подобрать примеры, когда условие (6) выполняется.

### 5. МЕТОДЫ, ОСНОВАННЫЕ НА ПЕРВИЧНЫХ КАЧЕСТВЕННЫХ ИЗМЕРЕНИЯХ, КОТОРЫЕ ЗАТЕМ ПРЕОБРАЗУЮТСЯ В КОЛИЧЕСТВЕННЫЕ

В методах этой группы первичные измерения осуществляются на качественном языке: используются смысловые понятия при подходе размытых множеств и качественные сравнения в методах аналитической иерархии. Качественные измерения трансформируются в количественные путем использования функций принадлежности или численной шкалы соответствий.

Имеются данные многих психологических исследований, что эти методы чувствительны к погрешностям в измерениях. В работе [9] определен разброс количественных значений вероятностей, соответствующих тем же качественным оценкам. Этот разброс достаточно велик, и интервалы количественных оценок, соответствующие определениям “вероятно”, “весьма вероятно” и т.п., пересекаются. Количественные эквиваленты качественных определений сравнительного характера (один критерий важнее или намного важнее другого) крайне субъективны. Как показывают исследования, методы аналитической иерархии весьма чувствительны к человеческим ошибкам [10].

### 6. ОЦЕНКА ПЕРВЫХ ДВУХ ГРУПП МЕТОДОВ

Оценивая первую и вторую группы методов, мы можем прийти к следующим выводам:

- 1) они обеспечивают полноту сравнений;
- 2) они весьма чувствительны к человеческим ошибкам в измерениях;
- 3) и, как следствие предыдущего, они могут привести к нетранзитивным отношениям на множестве альтернатив.

### 7. МЕТОДЫ, ОСНОВАННЫЕ НА КОЛИЧЕСТВЕННЫХ ИЗМЕРЕНИЯХ, НО ИСПОЛЬЗУЮЩИЕ НЕСКОЛЬКО ИНДИКАТОРОВ ПРИ СРАВНЕНИИ АЛЬТЕРНАТИВ (outranking approach)

В методах сравнительного превосходства используется подход постепенного введения уровней превосходства одной альтернативы над другой при парном сравнении. Использование псевдокритериев с сильным и слабым превосходством, использование запретов (вето) при определенных значениях оценок по критериям имеют цель не допустить сравнимости альтернатив при существенных различиях в профилях оценок по критериям и при-

мерно равной полезности, т.е. не допустить выполнения неравенства (6).

Отличительной чертой методов данной группы является отношение несравнимости между некоторыми альтернативами, т.е., требование полноты сравнений не выполняется.

В методах сравнительного превосходства при определенных уровнях согласия и несогласия могут возникнуть нетранзитивные отношения на множестве альтернатив, появляются циклы. В работе [11] доказано необходимое условие отсутствия циклов на множестве альтернатив. Это условие накладывает ограничения на уровни изменения индексов согласия и несогласия при предположении о точности количественных измерений. Конечно, неточности в количественных измерениях могут также привести к нетранзитивности. Поэтому предложенное в [11] условие отсутствия циклов в результирующих графах отношений между альтернативами является необходимым, но не достаточным. Однако при определенных диапазонах изменения весов критериев и оценок альтернатив соотношения между альтернативами остаются неизменными.

### 8. МЕТОДЫ, ОСНОВАННЫЕ НА КАЧЕСТВЕННЫХ ИЗМЕРЕНИЯХ БЕЗ КАКОГО-ЛИБО ПЕРЕХОДА К КОЛИЧЕСТВЕННЫМ ПЕРЕМЕННЫМ

Методы вербального анализа решений [7, 12] имеют психологическое обоснование. Прежде всего в них используются те операции получения информации от ЛПР и экспертов, которые на основе проведенных психологических экспериментов расценены как надежные. Кроме того, информация, полученная от ЛПР, проверяется на противоречивость.

Для методов вербального анализа решений характерны отказ от ненадежных количественных измерений и использование более надежных качественных измерений. Известно, что качественные сравнения вида “больше”, “меньше”, “примерно одинаковы” являются существенно более надежными, чем количественные. Такой подход приводит к исключению нетранзитивности на множестве альтернатив. Однако методы вербального анализа решений не обеспечивают полноты отношений между альтернативами, так как некоторые из альтернатив оказываются в отношении несравнимости. Причина несравнимости иная, чем в методах сравнительного превосходства. В методах вербального анализа решений используются лишь качественные (а не количественные) способы получения информации от ЛПР, что и определяет ограничение возможности сравнения альтернатив.

Таблица 1

Требования	Группы методов			
	Методы, основанные на количественных измерениях	Методы, основанные на качественных измерениях, результаты которых переводятся в количественный вид	Методы, основанные на количественных измерениях, но использующие несколько индикаторов при сравнении альтернатив	Методы, основанные на качественных измерениях без какого-либо перехода к количественным переменным
Полнота отношений	Есть	Есть	Нет	Нет
Транзитивность	Нет	Нет	В некоторых методах есть	Есть
Чувствительность к ошибкам в измерениях	Чувствительны	Чувствительны	Менее чувствительны, чем методы двух первых групп	Нечувствительны

## 9. ВЫВОДЫ

Итак, оценка соответствия четырех групп методов трем основным требованиям к результатам их применения приводит к следующему результату: методы первых двух групп обеспечивают полноту отношений на множестве альтернатив, что не выполняется для двух других групп методов.

Требования транзитивности отношений на множестве альтернатив и малой чувствительности к человеческим ошибкам при измерениях оказались зависимыми: чувствительность метода к человеческим ошибкам может привести к не-транзитивности.

Результирующая оценка соответствия различных групп методов трем основным требованиям к их результатам дана в табл. 1.

Таблица 1 приводит нас к следующему утверждению.

*Утверждение 2. Нормативные методы принятия решений не могут одновременно обеспечивать полноту сравнений, быть рациональными и нечувствительными к человеческим ошибкам в измерениях.*

## 10. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Итак, применительно к задачам индивидуального выбора мы получили следующий парадоксальный результат: нормативные методы не могут быть одновременно рациональными и решающими. Если они используют количественные измерения, то ограниченные возможности человеческой системы переработки информации приводят к нарушениям рациональности выбора, ошибкам и противоречиям. Это не означает, что нарушение рациональности возникает в любом случае: в большинстве случаев заданное множество альтернатив определяет полученный результат и рациональность выбора существует. Однако в общем случае неточность количествен-

ных измерений приводит к нарушению рациональности.

Есть две возможности избежать нарушения рациональности:

1) принимать решение о том, что альтернатива *A* лучше *B* лишь при достаточно большом различии по полезности между альтернативами *A* и *B* (подход методов сравнительного превосходства);

2) перейти к качественным (более надежным) измерениям полезностей с проверкой информации ЛПР на непротиворечивость (подход методов вербального анализа решений).

Однако при использовании методов относительного превосходства альтернатив и вербального анализа решений отношения на множестве альтернатив не являются полными, появляется несравнимость.

Этот парадокс заставляет нас вспомнить об известном парадоксе Эрроу в задачах коллективного выбора [13]. Доказано, что правило выбора не может быть одновременно демократическим, рациональным и решающим. В случае индивидуального выбора мы видим, что иные три требования к результату применения метода одновременно не выполняются.

Если потребовать одновременно от метода малую чувствительность к человеческим погрешностям при измерениях, рациональность и полноту отношений между альтернативами, то одновременное выполнение этих требований невозможно.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 00-15-96053).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ларичев О.И. Теория и методы принятия решений, а также хроника событий в волшебных странах. М.: Логос, 2000.

2. Judgment under Uncertainty: Heuristics and Biases / D. Kahneman, P. Slovic, A. Tversky Eds. Cambridge: Univ. Press, 1982.
3. Кини Р.Л., Райфа Х. Принятие решений при многих критериях: Предпочтения и замещения. М.: Радио и связь, 1981.
4. Саати Т., Кернс К. Аналитическое планирование. Организация систем. М.: Радио и связь, 1991.
5. Zadeh L. // Fuzzy Sets and Systems. 1978. V. 1. P. 3–28.
6. Roy B. Multicriteria Methodology for Decision Aiding. Dordrecht: Kluwer, 1996.
7. Ларичев О.И., Мошковиц Е.М. Качественные методы принятия решений. М.: Физматлит, 1996.
8. Borcharding K., Schmeer S., Weber M. In: Contributions to Decision Making. Amsterdam: Elsevier, 1995.
9. Zwick R., Wallsten T.S. // Intern. J. Man-Machine Stud. 1989. V. 30. P. 69–111.
10. Hizingh E., Vrolijk H. // Organiz. Behaviour and Human Decision Processes. 1997. V. 70. № 3. P. 237–347.
11. Анич И., Ларичев О.И. // АиТ. 1996. № 8. С. 108–118.
12. Larichev O., Moshkovich H. Verbal Decision Analysis for Unstructured Problems. Boston: Kluwer, 1997.
13. Arrow K.J. Social Choice and Individual Values. N. Y.: Wiley, 1951